Logica semplice (per davvero)

Rovesti Gabriel

Attenzione

Il file non ha alcuna pretesa di correttezza; di fatto, è una riscrittura attenta di appunti, slide, materiale sparso in rete, approfondimenti personali dettagliati al meglio delle mie capacità. Credo comunque che, per scopo didattico e di piacere di imparare (sì, io studio per quello e non solo per l'esame) questo file possa essere utile. Semplice si pone, per davvero ci prova.
Thank me sometimes, it won't kill you that much.

Gabriel

Sommario

Logica: Introduzione, preposizioni e tabelle di verità

La logica è la madre di tutte le discipline e, in particolare, serve a comprende un meccanismo di ragionamento simile a quello che le macchine restituiscono, in particolari programmi e procedure algoritmiche: esso è il prerequisito per la correttezza dei programmi.
In particolare, si capisce:

- Il significato di una frase
- Le conseguenze e le implicazioni

Vediamo infatti che le lettere dell'alfabeto sono considerate *variabili atomiche* e una serie di simboli, come segue:

connettivo unario della **negazione** $\neg$

connettivo binario dell' **implicazione** $\rightarrow$

connettivo binario della **congiunzione** $\&$

connettivo binario della **disgiunzione** $\vee$

le parentesi (e)
la proposizione costante atomica **falso** $\perp$
la proposizione costante atomica **vero** `tt`.

Traduciamo similmente una serie di costrutti:

$$(\ A \ \text{e} \ B \ ) \ \text{e} \ C$$

si scrive

$$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\mathbf{C}$$

che NON si può semplificare in

$$\mathbf{A}\&\mathbf{B}\&\mathbf{C}$$

perchè il connettivo di congiunzione è solo binario!!
Inoltre

$$(\ A \ \text{e} \ B \ ) \ \text{o} \ C$$

si scrive

$$(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$$

Avremo infatti che:

- & traduce E/And
- → è l'implicazione logica (allora/quindi)

Nelle frasi, può apparire il *solo se* e, per tradurlo, occorre:
- riscrivere la frase togliendo il "solo"
- tradurre la frase ottenuta usando l'implicazione
- se la frase ottenuta è pr1 → pr2 allora la traduzione della frase iniziale si trova scambiando antecedente con conseguente, ovvero scrivendo pr2 → pr1.
Avremo infatti che:

In un'**implicazione**

$$\mathbf{Pr_1} \rightarrow \mathbf{Pr_2}$$

l'**antecendente** dell'implicazione $\mathbf{Pr}_1$ si dice **condizione SUFFICIENTE** affinchè si verifichi il **conseguente** dell'implicazione $\mathbf{Pr}_2$	il **conseguente** dell'implicazione $\mathbf{Pr}_2$ si dice **condizione NECESSARIA** affinchè si verifichi l'**antecendente** dell'implicazione $\mathbf{Pr}_1$

Qualche esempio di proposizione:

La proposizione
"Oggi è venerdì e domani è sabato"
ha la forma logica di congiunzione di due proposizioni

$$\mathbf{V\&S}$$

ove
V=**"Oggi è venerdì"**
S= **"domani è sabato"**

"Oggi è venerdì e domani è sabato, mentre dopodomani è domenica" si può formalizzare così

$$(V\&S)\&D$$

ove
V="Oggi è venerdì"
S="domani è sabato"
D="dopodomani è domenica"

(si noti che "mentre" ha lo stesso significato di una &)

Similmente, le singole frasi possono essere formalizzate come unica frase:

Ad esempio l'asserzione

"È vero che **se il treno è in ritardo i viaggiatori non sono contenti** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**".

si può formalizzare come UNICO enunciato formale in

$$(V \to \neg R) \to (R \to \neg V)$$

ove
V=**"i viaggiatori sono contenti"**
R=**"il treno è in ritardo"**

Come si vede, le singole frasi si traducono anche come sorta di albero, quindi le singole frasi prima dell'implicazione nella parte superiore e il resto nella parte inferiore:

1. L'asserzione

   "È vero che **non si dà il caso che non ci sia silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio.**"

   si può formalizzare in

   $$\mathbf{D\&(D \to S)\ \to\ \neg\neg S}$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} D \\ D \to S \\ \hline \neg\neg S \end{array}$$

   ove

   D= **"tutti dormono"**
   S=**"c'è silenzio"**

L'asserzione

"È vero che **c'è silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio**."

si può formalizzare in

$$\mathbf{D\&(D \to S)} \ \to \ \mathbf{S}$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{\begin{array}{l} D \\ D \to S \end{array}}{S}$$

ove

D= "**tutti dormono**"
S="**c'è silenzio**"

l'asserzione

"È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**"

si può formalizzare in

$$\mathbf{(C \to N)} \ \to \ \mathbf{(\neg N \to \neg C)}$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{C \to N}{\neg N \to \neg C}$$

ove
N= "**il tuo vicino di banco è Napoleone**"
C="**la radice quadrata canta alla Scala di Milano**"

Essendo che colleghiamo la logica alla programmazione, siamo interessati a capire sia il senso che la *verità* delle frasi. Questo lo facciamo, sulla base di una proposizione formale composta tramite connettivi logici, partendo dalle proposizioni atomiche, associamo una <u>tabella di verità</u>:

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	...	V_n	$\mathbf{comp(V_1,\ldots,V_n)}$
0	1	...	...	$\mathbf{c_1}$
0	0	...	...	$\mathbf{c_2}$
1	1	...	...	$\mathbf{c_3}$
1	0	......	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

che associa a $\mathbf{comp(V_1,\ldots,V_n)}$ un valore IN USCITA $\mathbf{c_i}$ che può solo essere **1** (per **vero**) oppure **0** (per **falso**) al variare delle combinazioni di valori **0** e **1** associate alle proposizioni atomiche $\mathbf{V_i}$ per $\mathbf{i = 1,\ldots,n}$.

La sua costruzione si costruisce componendo le tabelle dei connettivi $\neg$, $\vee$, $\&$, $\to$

Queste tabelle seguono quelle delle porte logiche, infatti si comportano come le tabelle di NOT, AND, OR, considerando che esiste la costante *vero* e la costante *falso*.

6.6.2 Tabella di verità di $\neg$

si ottiene considerando che

¬A è vero sse A è falso

ed è la funzione unaria

A	**¬A**
0	1
1	0

6.6.3 Tabella di verità di &

si ottiene considerando che

A&B è vero sse A è vero e B è vero

ed è la funzione binaria

A	**B**	**A&B**
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

6.6.4 Tabella di verità di $\vee$

si ottiene considerando che

A∨B è vero sse A è vero o B è vero o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	**B**	**A∨B**
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

6.6.5 Tabella di verità di $\rightarrow$

si ottiene considerando che

A→B è vero sse ¬A∨B è vero

ed è la funzione binaria

A	**B**	**A→B**
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

ottenuta costruendo la tabella di $\neg A \vee B$.

6.6.6 Tabelle di verità delle proposizioni costante vero e falso

Le tabelle di verità della proposizione costante **vero** `tt` e della proposizione costante **falso** $\perp$ sono le seguenti:

$\perp$
0

`tt`
1

Da qui possiamo partire per costruire le tabelle di verità di proposizioni composte, per esempio:

Ad esempio le sottoproposizioni di

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

sono $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ mentre le sottoproposizioni di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ sono le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Quindi, ad esempio, per costruire la tabella di

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

a partire dalle sue variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si costruisce una tabella *allargata* inserendo prima della colonna di uscita in corrispondenza di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$, le colonne di uscite delle sue

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	?	?	?
0	0	?	?	?
1	1	?	?	?
1	0	?	?	?

e si completano le colonne delle sua sottoproposizioni, cominciando da quella più vicina

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	?	?
0	0	1	?	?
1	1	1	?	?
1	0	0	?	?

e poi si prosegue compilando la successiva colonna (notando che la compilazione della colonna di $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ non fa uso di quella di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$!)

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	0	?
0	0	1	1	?
1	1	1	1	?
1	0	0	1	?

Infine si compila la colonna delle uscite di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ secondo la tabella di verità della disgiunzione applicata alle uscite delle ultime due colonne come segue

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1

La tabella di verità di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ è infine ottenuta *cancellando le colonne delle sue sottoproposizioni* ed è:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	1

Ora, introduciamo un concetto fondamentale in logica:

- Le tautologie, quindi una proposizione *valida per tutti i valori* della tabella di verità (quindi ha tutti 1)
- Le contraddizioni, quindi una proposizione *non valida per tutti i valori* della tabella di verità (quindi ha tutti 0)
- Un'opinione in logica classica se ha almeno un 1 e almeno uno 0 come valori in uscita nella sua tabella di verità.
- Soddisfacibile se è 1 qualche valore in uscita nella sua tabella di verità.
- Non Valida se è 0 qualche valore in uscita nella sua tabella di verità.

-

6.7.1 Esempi di analisi della validità di proposizioni

1. $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$ è una tautologia?

   Se facciamo la tabella di verità per $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$ otteniamo

A	B	A→B	(A→B)&A
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

   e concludiamo che è NON VALIDA (per esempio per $A = B = 0$) $\Rightarrow$ NON è tautologia $\Rightarrow$ NON vale $\models (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$
   Concludiamo però che è soddisfacibile per $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{1}$.

2. Guardando la tabella di $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$ concludete che $\neg(\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}\ )$ è una tautologia???

   Chiaramente $\neg(\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}\ )$ è NON VALIDA (per i valori $A = B = 1$ ad esempio) e SODDISFACIBILE (per i valori $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$).

3. $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}$ è una tautologia?

   Se facciamo la tabella di verità

A	B	A→B	(A→B)∨A
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

   otteniamo che la formula $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}$ è **VERA classicamente**, $\Rightarrow$ è una **tautologia classica** $\Rightarrow$ vale $\models (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}$. Chiaramente la sua negazione $\neg(\,(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}\,)$ è INSODDISFACIBILE.

Similmente, esiste il concetto di *equivalenza*:

Indichiamo con il segno

$$\leftrightarrow$$

il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

$$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2 \equiv (\,\mathtt{pr}_1\rightarrow\mathtt{pr}_2\,)\ \&\ (\,\mathtt{pr}_2\rightarrow\mathtt{pr}_1\,)$$

che si legge "$\mathtt{pr}_1$ è **equivalente** a "$\mathtt{pr}_2$".

Il connettivo "equivalenza" ha quindi la seguente tabella di verità

A	B	A↔B
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Theorem 6.1 *Date proposizioni* $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$*, allora*

> $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$ *hanno la* **stessa tabella di verità** *(contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)*
>
> *sse*
>
> $\mathtt{pr_1}\leftrightarrow\mathtt{pr_2}$ *è una* **tautologia**
>
> *ovvero vale* $\models \mathtt{pr_1}\leftrightarrow\mathtt{pr_2}$

e in tal caso si dice che la proposizione $\mathtt{pr_1}$ è *uguale semanticamente* a $\mathtt{pr_2}$, ovvero l'**uguaglianza semantica** di proposizioni è l' **equivalenza** di proposizioni nel senso della seguente definizione:

Def. 6.2 Date due proposizioni formali $\mathtt{pr_1}$ e $\mathtt{pr_2}$, la proposizione $\mathtt{pr_1}$ si dice **equivalente** a $\mathtt{pr_2}$ e se e solo se $\mathtt{pr_1}\leftrightarrow\mathtt{pr_2}$ è una tautologia, ovvero vale $\models \mathtt{pr_1}\leftrightarrow\mathtt{pr_2}$.

Si ha anche *uguaglianza sintattica* quando due frasi sono scritte nello stesso modo e sono anche semanticamente uguali. Similmente, possiamo *sostituire* le tautologie una dentro l'altra.

Theorem 6.3 (sostituzione semplice) *Date le proposizioni* $\mathtt{pr_1(A)}$ *e* $\mathtt{pr_2}$

> *Se* $\models \mathtt{pr_1(A)}$
>
> *allora* $\models \mathtt{pr_1(pr_2)}$.

L'equivalenza, comunque, è simmetrica e transitiva. Si ha anche l'equivalenza a pezzi: se per una proposizione vale per una certa variabile particolare l'equivalenza, anche nella seconda frase si ha lo stesso. Da entrambe, comunque, consegue la verità.
Ogni tabella a n entrate, con $n \geq 1$, corrisponde alla tabella di verità di una proposizione formale con al più n variabili proposizionali e che *non* abbiamo bisogno di aggiungere nuove proposizioni per rappresentare tutte le tabelle di verità.

I connettivi hanno tabelle di verità definite complete; similmente, ogni tabella con n entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n-ario che si può scrivere in *forma normale disgiuntiva*, se è una disgiunzione di clausole, dove le clausole sono una disgiunzione di letterali.
La procedura per scrivere la forma normale disgiuntiva di una tabella di verità a n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità di $\mathbf{conn}(\mathbf{V_1},\ldots,\mathbf{V_n})$
- se **NON ESISTE almeno una riga con risultato 1** poni

$$\mathbf{V_1}\&\neg\mathbf{V_1}$$

- se **ESISTE almeno una riga con risultato 1** faccio la disgiunzione

$$\bigvee_{\mathbf{i}\text{ indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i}$$

  ove

$$\mathbf{riga_i} \equiv (((\mathbf{C_{i,1}}\&\mathbf{C_{i,2}})\ldots\&\mathbf{C_{i,n}}$$

  è multipla congiunzione di $\mathbf{C_{i,k}}$ definiti come segue

$$\mathbf{C_{i,k}} \equiv \begin{cases} \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{1} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg\mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{0} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V_1},\ldots,\mathbf{V_n}) \leftrightarrow \bigvee_{\mathbf{i}\text{ indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i}$$

Similmente abbiamo una *forma normale congiuntiva*, se è una congiunzione di clausole, dove le clausole sono una disgiunzione di letterali.

La procedura per scrivere la forma normale congiuntiva di una tabella di verità ad n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità del connettivo **n-ario** $\mathbf{conn}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n})$
- se **NON ESISTE almeno una riga con risultato 0** poni

$$\mathbf{V_1} \vee \neg \mathbf{V_1}$$

- se **ESISTE almeno una riga con risultato 0** faccio la congiunzione

$$\&_{\mathbf{i}\text{ indice riga con risultato } 0} \quad \overline{\mathbf{riga_i}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga_i}} \equiv (((\mathbf{C_{i,1}} \vee \mathbf{C_{i,2}}) \ldots \vee \mathbf{C_{i,n}}$$

è multipla disgiunzione di $\mathbf{C_i}$ definiti come segue

$$\mathbf{C_{i,k}} \equiv \begin{cases} \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{0} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{1} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n}) \;\leftrightarrow\; \&_{\mathbf{i}\text{ indice riga con risultato } 0} \quad \overline{\mathbf{riga_i}}$$

Queste due forme servono per determinare univocamente la verità di affermazioni congiuntive e disgiuntive e dimostra la completezza di ogni tabella di verità.

Per <u>verificare una tautologia</u>, abbiamo due possibilità, spesso combinate:

1. **strategia tabella**: *fai la tabella di verità* di **pr**
   vantaggio: strategia sicura e automatica
   svantaggio: la tabella può essere molto complessa

2. **strategia riduzione**: *riduci* **pr** *tramite equivalenze note ad una tautologia nota*
   vantaggio: strategia veloce, se termina
   svantaggio: strategia non automatica e non sempre terminante in una proposizione nota

Esempio di verifica di validitá di una proposizione. Abbiamo giá visto che l'asserzione

"È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**"

si può formalizzare in

$$(C \to N) \;\to\; (\neg N \to \neg C)$$

ove
$N=$ **"il tuo vicino di banco è Napoleone"**
$C=$**"la radice quadrata canta alla Scala di Milano"**

Si usa sempre questo insieme di leggi qui:

associatività $\vee$	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$
associatività &	$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\mathbf{C}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\&\mathbf{C})$
commutatività $\vee$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$
commutatività &	$\mathbf{A}\&\mathbf{B}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{B}\&\mathbf{A}$
distributività $\vee$ su &	$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B}\&\mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\&(\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$
distributività & su $\vee$	$\mathbf{A}\&(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \vee (\mathbf{A}\&\mathbf{C})$
idempotenza $\vee$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}$
idempotenza &	$\mathbf{A}\&\mathbf{A}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}$
leggi di De Morgan	$\neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$\neg\mathbf{B}\&\neg\mathbf{C}$
	$\neg(\mathbf{B}\&\mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{C}$
legge della doppia negazione	$\neg\neg\mathbf{A}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}$
implicazione classica	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$
disgiunzione come antecendente	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})\&(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$
congiunzione come antecendente	$(\mathbf{A}\&\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}))$
legge della contrapposizione	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})$	$\leftrightarrow$	$(\neg\mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{A})$
legge del modus ponens	$\mathbf{A}\&(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})$	$\rightarrow$	$\mathbf{C}$
legge della NON contraddizione	$\neg(\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A})$		
legge del terzo escluso	$\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$		

E, formalmente, questi teoremi, descritti prima a parole:

Theorem 6.7 (equivalenza per pezzi) *Se vale* $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$, *ovvero* $\mathtt{pr}_1$ *è equivalente a* $\mathtt{pr}_2$ *presa un'altra proposizione* $\mathtt{pr}_3(\mathbf{A})$, *che è una scrittura per indicare che nella proposizione* $\mathtt{pr}_3(\mathbf{A})$ *compare la variabile* $\mathbf{A}$, *allora vale*

$$\models \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_1) \leftrightarrow \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_2)$$

Per applicare questo teorema al fine di dedurre che $(C \rightarrow D)\&B$ è equivalente a $(\neg C \vee D)\&B$ basta considerare la proposizione

$$A\&B$$

e sostituire A una volta con $C \rightarrow D$ e si ottiene (dopo aver messo le parentesi) $(C \rightarrow D)\&B$ e un'altra volta sostituire A con $\neg C \vee D$ e si ottiene $(\neg C \vee D)\&B$ che è equivalente a $(C \rightarrow D)\&B$ per il teorema enunciato.

Proposition 6.4 (verità di equivalenti) *Date* $\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$ *proposizioni*

se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ *allora*
vale ($\models \mathtt{pr}_1$ *sse* $\models \mathtt{pr}_2$ *)*

L'equivalenza di proposizioni è una relazione simmetrica e transitiva:

Lemma 6.5 (simmetria equivalenti) *Date* $\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$ *proposizioni*

se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ *allora* $\models \mathtt{pr}_2 \leftrightarrow \mathtt{pr}_1$

Esempio: per dedurre che $\models A \leftrightarrow A\&A$ vale basta usare la simmetria dell'equivalenza sopra a partire dall'idempotenza della & in sezione 6.9.

Lemma 6.6 (transitività equivalenti) *Date* $\mathtt{pr}_1$, $\mathtt{pr}_2$ *e* $\mathtt{pr}_3$ *proposizioni*

se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ *e* $\models \mathtt{pr}_2 \leftrightarrow \mathtt{pr}_3$
allora $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_3$

Esempio: per dedurre che $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}\&\mathbf{A}$ è una tautologia basta usare la transitività dell'equivalenza a partire dalla simmetrica dell'idempotenza della & in sezione 6.9 ovvero $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}\&\mathbf{A}$ e dall'idempotenza della $\vee$.

Riferito all'esempio di prima:

Ora verifichiamo se $(C \to N) \to (\neg N \to \neg C)$ è una tautologia o non è valida e quindi soddisfacibile o insoddisfacibile.

Usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione nell'antecedente dell'implicazione piú esterna otteniamo che

$$\models (\ (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg C \vee N \to (\ \neg N \to \neg C\ )\ )$$

Poi usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione nel conseguente dell'implicazione piú esterna otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to (\ \neg N \to \neg C\ )\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg C \vee N \to \neg\neg N \vee \neg C\ )$$

Di nuovo usando il teorema 6.7 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to \neg\neg N \vee \neg C\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg C \vee N \to N \vee \neg C\ )$$

Infine usando il teorema 6.7 sulla commutativitá di $\vee$ otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to N \vee \neg C\ ) \ \leftrightarrow\ (\ N \vee \neg C \to N \vee \neg C\ )$$

e per transitività dell'equivalenza di proposizioni si ottiene che vale

$$\models (\ (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ N \vee \neg C \to N \vee \neg C\ )$$

Ora chiaramente vale

$$\models\ N \vee \neg C \to N \vee \neg C$$

per il teorema di sostituzione semplice sapendo che $A \to A$ è una tautologia (si sostituisca A con $N \vee \neg C$).

Concludiamo quindi per la proposizione 6.4 sulla veritá di equivalenti che vale PURE

$$\models (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)$$

ossia $(\ (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)\ )$ è tautologia, quindi è una proposizione VALIDA.

Esempio di validità e soddisfacibilità anche con i NOT/NON di mezzo:

Esempio: formalizzare in un unica proposizione l'asserzione

"È vero che **se i viaggiatori non sono contenti allora il treno è in ritardo** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**."

usando
V=**"i viaggiatori sono contenti"**
R=**"il treno è in ritardo"**
e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica e in caso contrario dire per quali valori delle variabili non è valida e se è soddisfacibile (e per quali valori delle variabili lo è) o insoddisfacibile.

La sua formalizzazione come UNICO enunciato è

$$(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$$

Usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione due volte otteniamo che

$$\models (\ (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to \neg\neg V \vee R\ )$$

Di nuovo usando il teorema 6.7 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\ \neg V \vee \neg R \to \neg\neg V \vee R\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to V \vee R\ )$$

e per transitività si deduce

$$\models (\ (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to V \vee R\ )$$

Ora si puó procedere in vari modi per concludere.

1. (primo modo) Si prova a vedere se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è NON VALIDO trovando valori per V e R tali per cui la conseguenza $V \vee R$ risulti falsa mentre sia vera la premessa $\neg V \vee \neg R$ dell'implicazione. Si osservi che i valori per cui $V \vee R$ risulta falsa sono $V = R = 0$ e per questi la premessa $\neg V \vee \neg R$ risulta 1. Perciò l'implicazione
$$\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$$
risulta falsa per $V = R = 0$ e dunque $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ NON è VALIDO.

   Si prova a vedere poi se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è SODDISFACIBILE. A tal scopo basta trovare dei valori per cui risulta 0 l'antecedente (ovvero risulta $\neg V \vee \neg R = 0$) e si osserva che a tal fine basta porre $V = R = 1$. Per tali valori l'implicazione $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta vera. Quindi $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta SODDISFACIBILE.

   Dal fatto che vale $\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$ ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$, i risultati su NON validità e soddisfacibilità ottenuti per il secondo membro dell'equivalenza sopra valgono pure per il primo membro $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$.

2. (altro modo) Si continua a trovare equivalenti di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$. Infatti usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione si trova che
$$\models (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R) \leftrightarrow \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R)$$
Poi di nuovo usando il teorema 6.7 su una legge di De Morgan si ottiene
$$\models \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R)$$
e di nuovo usando il teorema 6.7 due volte sulla doppia negazione si conclude
$$\models (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$
Ora per transitività si deduce
$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$
ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $(V \& R) \vee (V \vee R)$. Ora $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente NON valido se troviamo valori che falsificano sia $V \& R$ che $V \vee R$ e a tal scopo basta porre $V = R = 0$. Inoltre $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente SODDISFACIBILE ponendo $V = R = 1$ perchè $V \vee R$ diventa 1. Concludiamo che pure $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ è NON valido e SODDISFACIBILE sugli stessi valori.

In logica classica, non esiste implicazione casuale; anche con implicazioni e verità controintuitive su affermazioni semanticamente sconnesse in apparenza, possono avere valori di verità.

La tautologia
$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$
mostra con il seguente esempio che l'implicazione della logica classica NON è causale in quanto si trovano delle verità controintuitive riguardanti le implicazioni. Infatti ponendo
A="Voi passerete l'esame di logica"
B="Avete una zia con i calli"
si ottiene che l'enunciato

"Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli, oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

è vero logicamente secondo la logica classica.

Ciò risulta comprensibile se si pensa che in realtà l'implicazione della logica classica coincide con la disgiunzione ovvero

$$\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2} \qquad \text{è equivalente a} \qquad \neg(\mathbf{pr_1}) \vee (\mathbf{pr_2})$$

Quindi la proposizione $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ ha lo stesso significato logico della proposizione
$$(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$$
che è evidentemente sempre vera come lo è l'enunciato

"**O** *voi non passerete l'esame di logica* **oppure** *avete una zia con i calli*, **oppure** *non avete una zia con i calli* **oppure** *passerete l'esame di logica.*"

Questa affinità può spiegare, secondo i dettami/regole delle formalizzazioni, anche su proposizioni apparentemente ovvie, come:

È vero che

"Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova"?

La risposta è che ovviamente sì non si dà questo caso.

La logica classica tratta verità *atemporali*, ma il valore di verità delle frasi presenti dipende da dove sono in questo momento; quindi, per raggiungere la verità, occorre usare un maggior numero di connettivi per poter meglio formalizzare semanticamente una frase e quindi risolverla.

Però una sua formalizzazione potrebbe essere

$$\neg(\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P})$$

con

L = **"Sono a Londra"**
P = **"Sono a Padova"**

ma si noti che la proposizione sopra è equivalente a

$$\neg(\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg(\neg\mathbf{L}\vee\mathbf{P})$$

e per leggi di De Morgan

$$\neg(\neg\mathbf{L}\vee\mathbf{P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg\neg\mathbf{L}\,\&\,\neg\mathbf{P}$$

e infine concludiamo

$$\neg\neg\mathbf{L}\,\&\,\neg\mathbf{P} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{L}\&\neg\mathbf{P}$$

ovvero l'affermazione di partenza risulta equivalente a

"Io sono a Londra e NON sono a Padova"

il che non è sempre vero...!

Sotto, qualche altro esempio:

Formalizzare in un UNICA proposizione le seguenti asserzioni (secondo i suggerimenti indicati) e mostrare se la proposizione ottenuta è **valida** o in caso contrario dire per quali valori delle variabili **non è valida** e se è **soddisfacibile** (e per quali valori delle variabili lo è) o **insoddisfacibile**.

Ricordiamo che nel seguito adottiamo la convenzione della sezione 5, ovvero che quando scriviamo

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{frase}_1\\ \mathbf{frase}_2\\ \dots\\ \mathbf{frase}_n\end{array}}{\mathbf{frase}}$$

intendiamo

"Ammesso che valga sia $\mathbf{frase}_1$ che $\mathbf{frase}_2$, che ... $\mathbf{frase}_n$, allora vale **frase**"

1. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o non sicuro.}}{\text{L'affare è conveniente e sicuro.}}$

   A =l'affare è conveniente
   S = l'affare è sicuro

   Soluzione: una formalizzazione dell'asserzione è

   $$\neg(\neg A \vee \neg S) \rightarrow A\&S$$

   e questa per il teorema 6.7 applicato con la simmetrica della legge di De Morgan su $\neg A \vee \neg S$ è equivalente a

   $$\neg\neg(A\&S) \rightarrow A\&S$$

   che per il teorema 6.7 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

   $$A\&S \rightarrow A\&S$$

   che è chiaramente valida. Siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza è valida.

2. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sia sicuro.}}{\text{L'affare non è conveniente nè sicuro.}}$

A =l'affare è conveniente
S =l'affare è sicuro

Soluzione: Una formalizzazione dell'asserzione è

$$\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che per il teorema 6.7 applicato con la legge di De Morgan su $\neg(\neg A \vee S)$ è equivalente a

$$\neg\neg A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che sempre per il teorema 6.7 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

$$A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

Ora chiaramente questa implicazione è NON valida se si trovano valori per cui $A\&\neg S$=1 e $\neg A\&\neg S$=0. Ora i valori che rendono vero l'antecedente dell'implicazione sono A=1 e S=0 da cui segue che il conseguente $\neg A\&\neg S$=0. Perciò la proposizione $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA per i valori A=1 e S=0.

Inoltre per rendere soddisfacibile $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ basta trovare dei valori per cui $A\&\neg S$=0 (oppure $\neg A\&\neg S$=1). E si vede chiaramente che per A=0, e S con valore qualsiasi, allora $A\&\neg S$=0 e quindi $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$=1. In conclusione $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ risulta SODDISFACIBILE per A=0, e S con valore qualsiasi. Infine siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza $\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA e SODDISFACIBILE sugli stessi valori trovati per $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$.

Calcolo dei sequenti ed alberi di derivazioni

Ora mostriamo un metodo più semplice e automatico per stabilire se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno. Tale metodo è meno complesso rispetto alle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che termina sempre con una risposta.
Ora introduciamo il sequente, che assume significato nel contesto delle proposizioni formali:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr_1, pr_2, \dots pr_n} \ \vdash \ \mathsf{cl_1, cl_2, \dots cl_m}$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

"**se** $\mathsf{pr_1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr_2}$ è *vero*... **e** $\mathsf{pr_n}$ è *vero* **allora** **o** $\mathsf{cl_1}$ è *vero* **oppure** $\mathsf{cl_2}$ è *vero*... **oppure** $\mathsf{cl_m}$ è *vero*"

o equivalentemente che la proposizione formale

$$(\mathsf{pr_1} \& \mathsf{pr_2}) \dots \& \mathsf{pr_n} \longrightarrow (\mathsf{cl_1} \vee \mathsf{cl_2}) \dots \vee \mathsf{cl_m} \quad \textit{è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) e le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\vdash \ \mathsf{cl_1, cl_2, \dots cl_m}$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

"**o** $\mathsf{cl_1}$ è *vero* **oppure** $\mathsf{cl_2}$ è *vero*...**oppure** $\mathsf{cl_m}$ è *vero*"

o equivalentemente che la proposizione

$$(\mathsf{cl_1} \vee \mathsf{cl_2}) \dots \vee \mathsf{cl_m} \qquad \textit{è vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$\mathtt{tt} \rightarrow (\mathsf{cl_1} \vee \mathsf{cl_2}) \dots \vee \mathsf{cl_m} \qquad \text{è vera}$$

posto che tutte le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr_1, pr_2, \dots pr_n} \ \vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

"**se** $\mathsf{pr_1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr_2}$ è **vero**... **e** $\mathsf{pr_n}$ *è vero* **allora** la costante **falso** *è vera*"

o equivalentemente la proposizione

$$(\mathsf{pr_1} \& \mathsf{pr_2}) \dots \& \mathsf{pr_n} \longrightarrow \perp \textit{ è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) siano proposizioni formali.

"**se** $\mathsf{pr_1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr_2}$ è **vero**... **e** $\mathsf{pr_n}$ *è vero* **allora** la costante **falso** *è vera*"

4. infine un sequente è anche la scrittura

$$\vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

"la costante **falso** è vera"

o equivalentemente che la proposizione

$$\perp \qquad \textit{è vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$\mathtt{tt} \rightarrow \perp \qquad \textit{è vera}$$

Il loro calcolo è definito calcolo dei sequenti, anche noto come LC_p
Per rappresentare i sequenti usiamo lettere greche maiuscole come *meta-variabili* per indicare liste di frase che possono essere anche vuote (es. di lettere, Γ, Δ, Σ).

Esempio di sequente

L'asserzione

Ammesso che **il programma termina e dà risultato 1**, *allora* **il programma è corretto.**

che secondo la convenzione della sezione 5 si può rappresentare anche in tal modo

$$\frac{\textbf{Il programma termina e dà risultato 1.}}{\textbf{Il programma è corretto.}}$$

si può formalizzare con il sequente

$$\mathbf{P\&U \vdash C}$$

ponendo:
P="Il programma termina"
U="Il programma dà risultato 1"
C="Il programma è corretto"

In verità però l'asserzione

Ammesso che **il programma termina e dà risultato 1**, *allora* **il programma è corretto.**

si può anche equivalentemente formalizzare nello stesso linguaggio formale con lo stesso significato associato alle proposizioni atomiche tramite il sequente

$$\vdash \mathbf{P\&U \rightarrow C}$$

o addirittura anche tramite il sequente

$$\mathbf{P, U \vdash C}$$

per come si intende il significato della virgola tra due proposizioni a sinistra del segno di sequente $\vdash$.

Normalmente, le proposizioni sono formalmente generalizzate da:

$$\Gamma^{(\&)} \rightarrow \Delta^{(\vee)}$$

intendendo l'insieme delle proposizioni congiunte e/o disgiunte.
Lo schema di validità dei sequenti è la *regola di inferenza di sequenti*, per cui se *vale questo sequente (o questi due sequenti) allora vale quest'altro sequente*. Usiamo gli alberi per formalizzare questi costrutti:

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P\&U \vdash C}}{\mathbf{P\&U \vdash C \vee \neg P}}$$

il cui significato è il seguente:
"**se** vale $\mathbf{P\&U \rightarrow C}$ **allora** vale pure $\mathbf{P\&U \rightarrow C \vee \neg P}$"

In particolare presenteremo un calcolo con due tipi di regole: quelle ad una premessa della forma

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\ \textbf{regola1}$$

e quelle a due premesse della forma

$$\frac{\Gamma'' \vdash \Delta'' \quad \Gamma''' \vdash \Delta'''}{\Gamma \vdash \Delta}\ \textbf{regola2}$$

In entrambe le regole i sequenti sopra la sbarra $\Gamma' \vdash \Delta'$ nella regola 1 e i sequenti $\Gamma'' \vdash \Delta''$ e $\Gamma''' \vdash \Delta'''$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nei nostri calcoli dei sequenti avremo anche regole a zero premesse che chiamiamo **assiomi**. Per esempio nel calcolo dei sequenti per la logica classica metteremo come assioma uno della forma

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2\end{array}$$

e un'altro della forma

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array}$$

L'idea è di usare le regole per trasformare sequenti a partire dagli assiomi in modo da *conservare il loro valore di verità dall'ALTO verso il BASSO.*

Fondamentale: regole di calcolo dei sequenti

Ora presentiamo il calcolo dei sequenti LC_p per la Logica Classica Proposizionale che contiene regole per i connettivi $\bot$, &, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** in forma di *schemi di assiomi*

Il calcolo LC_p è composto dai seguenti schemi di assiomi e regole:

$$\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \Gamma, \mathrm{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathrm{pr}, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\textbf{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\top\\ \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathrm{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathrm{pr}_1)\&(\mathrm{pr}_2), \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathrm{pr}_1)\&(\mathrm{pr}_2) \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathrm{pr}_1)\vee(\mathrm{pr}_2), \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathrm{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathrm{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathrm{pr}_1)\vee(\mathrm{pr}_2) \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathrm{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\mathrm{pr}_1), \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg(\mathrm{pr}_1) \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathrm{pr}_1 \vdash \mathrm{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathrm{pr}_1)\rightarrow(\mathrm{pr}_2), \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathrm{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathrm{pr}_1)\rightarrow(\mathrm{pr}_2) \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

Oppure:

Un'altra formulazione del calcolo dei sequenti della logica proposizionale è quella contenente gli assiomi e le regole che seguono assieme a *TUTTE le istanze di assiomi e regole* ottenute *istanziando le variabili proposizionali A e B utilizzate nella scrittura degli assiomi e regole con proposizioni arbitrarie* e i contesti denotati con lettere greche $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Sigma}$, **etc**. con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote).

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\,\text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\,\text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\,\&\text{–D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\,\&\text{–S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vee\text{–D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee\text{–S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg\text{–D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg\text{–S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\,\rightarrow\text{–D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\,\rightarrow\text{–S}$$

In altre parole, il calcolo definito da queste regole è chiuso per sostituzione dei suoi assiomi e regole con arbitrarie proposizioni $pr1$ e $pr2$, che chiamiamo meta-variabili per proposizioni complesse arbitrarie, al posto delle variabili proposizionali A e B.

Il calcolo dei sequenti costruisce gli alberi di derivazione, ottenuto da un sequente detto *radice*, applicando le regole del calcolo dal basso verso l'alto al fine di costruire oggetti della forma:

$$\dfrac{\mathbf{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathbf{\Gamma_5 \vdash \Delta_5}}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}\,\textbf{regola1} \quad \dfrac{\mathbf{\Gamma_6 \vdash \Delta_6}}{\Gamma_4 \vdash \Delta_4}\,\textbf{regola1}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}\,\textbf{regola2}}{\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}}\,\textbf{regola2}$$

all'interno dei quali chiameremo *foglie* i sequenti premesse di regole che non sono conclusioni di altre regole.
Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Esistono vari tipi di alberi nel calcolo dei sequenti:

1. Ogni sequente
$$\Gamma \vdash \mathbf{\Delta}$$
nel linguaggio $\mathcal{L}$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ avente il sequente $\Gamma \vdash \mathbf{\Delta}$ sia come *radice* che come *unica foglia*.
2. Dato un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$
$$\frac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}}$$
allora
$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}}}{\mathbf{\Gamma}' \vdash \mathbf{\Delta}'}\ reg*$$
ottenuto estendendo π con una regola *reg∗* del calcolo $\mathbf{LC}_p$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ con *radice* $\Gamma' \vdash \mathbf{\Delta}'$ e con *foglie quelle di* π_1.
3. Dati due alberi nel calcolo $\mathbf{LC}_p$
$$\frac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}} \qquad\qquad \frac{\pi_2}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}$$
allora
$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}} \quad \cfrac{\pi_2}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}}{\mathbf{\Gamma_3} \vdash \mathbf{\Delta_3}}\ reg*$$
ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di di $\mathbf{LC}_p$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ con *radice* $\Gamma_3 \vdash \mathbf{\Delta_3}$ e con *foglie l'unione di quelle di* π_1 *e quelle di* π_2.

Poi chiaremo *albero di derivazione* di un sequente un albero avente tal sequente come radice e TUTTE le foglie come assiomi.

Definiamo inoltre:

- La *derivazione* del sequente, che ha il sequente stesso come radice ed ogni foglia un'istanza di un assioma secondo il calcolo dei sequenti
- Un sequente è detto *derivabile* se esiste un albero di derivazione che ha come radice il sequente

In altri termini un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è `derivabile` nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ se esiste un albero in cui

- $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è la radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathbf{LC}_p$
ottenuto **sostituendo** le variabili $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathbf{pr}_1$ e $\mathbf{pr}_2$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di $\mathbf{LC}_p$
ottenute **sostituendo** le variabili $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathbf{pr}_1$ e $\mathbf{pr}_2$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

Gli assiomi sono di tre tipi:

- gli assiomi identità
- gli assiomi del falso
- gli assiomi del vero

$$\begin{array}{ccc} \textbf{ax-id} & \textbf{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \mathbf{\Gamma}, \mathrm{pr}, \mathbf{\Gamma}' \vdash \mathbf{\Delta}, \mathrm{pr}, \mathbf{\Delta}' & \mathbf{\Gamma}, \bot, \mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla & \mathbf{\Gamma} \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

Si noti che è *assioma identità OGNI sequente* che ha *ALMENO UNA PROPOSIZIONE (o ATOMICA o COMPOSTA) che compare a sx e a dx del segno di sequente* $\vdash$.

Ad esempio si noti che il sequente
$$\mathbf{A}\vdash\mathbf{A}$$
è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** con $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}'$, $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{\Delta}'$ tutte liste vuote e $\mathbf{A}$ come proposizione $\mathbf{pr}$ presente a destra e a sinistra di $\vdash$.

Esempio di derivazione

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-\mathrm{D}$ come segue

$$\dfrac{\mathbf{P\&Q\vdash Q} \quad \mathbf{P\&Q\vdash P}}{\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-\mathrm{D}$ del calcolo ottenuta ponendo: $\mathbf{Q}$ al posto di $\mathbf{pr}_1$, $\mathbf{P}$ al posto di $\mathbf{pr}_2$ e la lista vuota al posto di $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{P\&Q}$ al posto di $\mathbf{\Gamma}$.

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\dfrac{\mathbf{P\&Q\vdash Q} \quad \mathbf{P\&Q\vdash P}}{\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}}\ \&-\mathrm{D}$$

NON è albero di derivazione completo perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P,Q\vdash Q}}}{\mathbf{P\&Q\vdash Q}}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P,Q\vdash P}}}{\mathbf{P\&Q\vdash P}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}}\ \&-\mathrm{D}$$

ove $\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P,Q\vdash Q}$ e $\mathbf{P,Q\vdash P}$ sono rispettivamente foglie del ramo di sinistra e di quello di destra.

tutti gli alberi ottenuti da una derivazione per sostituzione di tutte le occorrenze di una variabile proposizionale con una proposizione arbitraria sono pure derivazioni.
Similmente, la *tabella di verità di un sequente* è dato dalla sua derivazione, infatti, un sequente può essere considerato tautologia/non valido/soddisfacibile/insoddisfacibile-paradossale se la sua derivazione è rispettivamente tautologia/non valido/soddisfacibile/insoddisfacibile-paradossale.

Il calcolo dei sequenti è valido è radice di una derivazione se *pr* è una tautologia, ovvero la sua tabella di verità ha 1 in ogni uscita, conservando quindi la verità dall'alto verso il basso e con regole che diminuiscono di complessità dal basso verso l'alto.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{valido}}{C,A,B\vdash A}}{C,A\&B\vdash A}\Downarrow\textbf{valido}}{A\&B,C\vdash A}\Downarrow\textbf{valido}}{(A\&B)\&C\vdash A}\Downarrow\textbf{valido} \quad \textbf{e} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{valido}}{C,A,B\vdash B} \quad \textbf{e} \quad \overset{\textbf{valido}}{C,A,B\vdash C}}{C,A,B\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{C,A\&B\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{A\&B,C\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{(A\&B)\&C\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)}\Downarrow\textbf{valido}$$

9.4.1 Procedura di decisione su derivabilità di sequenti in $\mathbf{LC}_p$

Per stabilire se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è una **tautologia classica** basta cercare una sua derivazione secondo la procedura che segue:

1. $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è assioma? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \\ & \text{se in } \mathbf{\Gamma} \text{ o in } \nabla \text{ c'è una proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{cases}$

2. Scegli in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ per esempio (includendo anche il caso $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2} \equiv \neg \mathbf{pr_1}$).
$\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ sta a dx di $\vdash$ nel sequente, a sx se $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ sta a sx di $\vdash$)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2} \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2} \end{cases}$

3. se operi su $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$.

4. se operi su $\mathbf{pr_1} \circ \mathbf{pr_2}$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?
$\begin{cases} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{cases}$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?
$\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$

CONCLUSIONE:
1. se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è derivabile in $\mathbf{LC}_p$
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è una **tautologia** e quindi un sequente **valido classicamente**
oppure
2. se nell'albero ottenuto qualche foglia NON è assioma, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ NON è DERIVABILE in $\mathbf{LC}_p$,
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è **NON valido** in logica classica.

Se l'algoritmo sopra per $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ si ferma con una foglia

$$\mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma allora

UNA riga della tabella di verità del sequente di partenza $\Gamma\vdash\nabla$ che lo rende **falso** si ottiene ponendo

- $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ per ogni variabile $\mathbf{A}$ in $\mathbf{\Gamma}'$
- $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ per ogni variabile $\mathbf{B}$ in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con valori A PIACERE.

Esempi di applicazione della procedura di decisione

Il sequente

$$\mathbf{P\to A\&B\vdash(A\&B\to R) \ \& \ (D \lor M)}$$

è una tautologia?

NO, non è una tautologia in quanto applicando la procedura di decisione al sequente possiamo costruire un albero del tipo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A, B\vdash P, R}}{\mathbf{A\&B\vdash P, R}}\,\&-S \qquad \mathbf{A\&B, A\&B\vdash R}}{\mathbf{A\&B, P\to A\&B\vdash R}}\,\to-S}{\mathbf{P\to A\&B, A\&B\vdash R}}\,sc_{sx}}{\mathbf{P\to A\&B\vdash A\&B\to R}}\,\to-D \qquad \mathbf{P\to A\&B\vdash D\lor M}}{\mathbf{P\to A\&B\vdash(A\&B\to R) \ \& \ (D \lor M)}}\,\&-D$$

che ha una foglia $\mathbf{A, B\vdash P, R}$ senza proposizioni composte che NON è un assioma e che ci dice che su ogni riga della tabella di verità del sequente radice in cui si pone $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e poi $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (non importa quale siano i valori di $\mathbf{D}$ e di $\mathbf{M}$) il sequente $\mathbf{P\to A\&B\vdash(A\&B\to R) \ \& \ (D \lor M)}$ risulta falso.

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{V},\mathbf{V},\mathbf{R} \qquad \neg\mathbf{R}\vdash \mathbf{V},\mathbf{R}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash \mathbf{V},\mathbf{R}}\ \to\!-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R},\neg\mathbf{V}\vdash\mathbf{R}}\ \neg\!-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}}\ \to\!-\mathrm{D}}{\vdash(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})}\ \to\!-\mathrm{D}$$

ove si noti che in $\to\!-\mathrm{S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$ NON è una tautologia ovvero è **NON valida** ed è falsa sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

9.6 Procedura per decidere se una proposizione è tautologia/opinione/paradosso in $\mathbf{LC}_p$

Data una proposizione **pr**
passo 1: si applichi la procedura di decisione provando a derivare $\vdash$ **pr** in LC_p

$$\begin{cases} \textbf{se si deriva} & \Rightarrow\ \textbf{pr} \text{ è una } \textbf{tautologia} \\ \textbf{se la procedura termina con un NON derivabile} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

passo 2: la proposizione **pr NON è una tautologia** e la riga su cui la tabella di **pr** va a **0** si ottiene in tal modo:
prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali
(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)
e poni a **1** le variabili a sx del sequente e a **0** quelle a dx
$\Rightarrow$ ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** la proposizione **pr**
poi vai al passo 3
passo 3: prova a derivare $\vdash \neg$**pr** in $\mathbf{LC}_p$ applicando la procedura di decisione

- se $\vdash \neg$**pr** si deriva $\Rightarrow$ $\vdash$ **pr** è **insoddisfacibile**, ovvero un **paradosso**
- se la procedura termina con $\vdash \neg$**pr** NON derivabile: applica il passo 2 a $\vdash \neg$**pr** e la riga trovata assegna **1** a **pr** $\Rightarrow$ **pr** è **vera** su di essa, dunque è **pr soddisfacibile** e quindi è un' **opinione**

9.6.2 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{V},\mathbf{V},\mathbf{R} \qquad \neg\mathbf{R}\vdash \mathbf{V},\mathbf{R}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash \mathbf{V},\mathbf{R}}\ \to\!-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R},\neg\mathbf{V}\vdash\mathbf{R}}\ \neg\!-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}}\ \to\!-\mathrm{D}}{\vdash(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})}\ \to\!-\mathrm{D}$$

ove si noti che in $\to\!-\mathrm{S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \to \neg\mathbf{R}) \to (\neg\mathbf{V} \to \mathbf{R})$ è **falsa** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e dunque **NON è una tautologia**.

Per stabilire se è un'opinione o un paradosso andiamo a derivare

$$\vdash\neg(\,(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\,)$$

ottenendo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{V},\mathbf{R}\vdash}{\mathbf{V}\vdash\neg\mathbf{R}}\,\neg\text{–D}}{\vdash\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}}\,\to\text{–D}\qquad \neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}\vdash}{(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\vdash}\,\to\text{–S}}{\vdash\neg(\,(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\,)}\,\neg\text{–D}$$

ove si noti che in $\to$–S NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma che ci permette di concludere che $\neg(\,(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\,)$ è **falsa** su $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$. Quindi concludiamo che la proposizione $(\,\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è **soddisfacibile** su $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$.

Dunque la *risposta finale* alla domanda sopra è che $(\,\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è un'**OPINIONE** perchè **falsa** sulla riga $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{0}$ e **vera** sulla riga $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$.

9.8 PROCEDURA per DECIDERE se un sequente è tautologia o opinione o un paradosso

Passo 1: Per decidere se un **sequente** $\Gamma\vdash\Delta$ è una **tautologia** o meno
si applichi a tal sequente la procedura 9.4.1. di decisione della sua derivabilità
Si hanno due casi:
I caso: il sequente $\Gamma\vdash\Delta$ risulta **derivabile**, dunque è una **tautologia** e quindi STOP.
II caso: il sequente $\Gamma\vdash\Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologa** ossia **NON è valido**.
Una riga su cui il sequente $\Gamma\vdash\Delta$ è falso si trova secondo la procedura 9.4.1. Si vada poi al passo 2.

Passo 2: per decidere se il **sequente** $\Gamma\vdash\Delta$ è **soddisfacibile** o meno
si applichi la procedura 7. al sequente $\vdash\neg(\mathbf{\Gamma}^{\&}\to\mathbf{\Delta}^{\vee})$
Ora si hanno due sottocasi:
I sottocaso: $\vdash\neg(\mathbf{\Gamma}^{\&}\to\mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologa** ossia **NON è valido**.
e quindi $\Gamma\vdash\Delta$ risulta **soddisfacibile** (oltrechè **NON valido**)
e poi si applichi la procedura 8. per trovare una riga su cui il sequente $\vdash\neg(\mathbf{\Gamma}^{\&}\to\mathbf{\Delta}^{\vee})$ è falso
e la riga ottenuta rende il sequente di partenza $\Gamma\vdash\Delta$ vero, e dunque **soddisfacibile**.
Ne segue che il sequente di partenza $\Gamma\vdash\Delta$ è un'**opinione** e quindi STOP.
II sottocaso: $\vdash\neg(\mathbf{\Gamma}^{\&}\to\mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta una **tautologia**
quindi il sequente di partenza $\Gamma\vdash\Delta$ risulta **INsoddisfacibile**,
ovvero è una **contraddizione/paradosso** e dunque STOP.

Similmente, possiamo *falsificare* un sequente proposizionale (composto da una parte prima e dopo il segno di sequente, oppure solo prima il segno di sequente, oppure solo dopo il segno di sequente) se la negazione del sequente risulta vera su una specifica riga.

L'idea è che una regola si dice *valida* se trasforma dall'alto verso il basso sequenti veri su una fissata riga r in sequenti veri sulla riga r posto che la riga r contenga tutte le variabili proposizionali che compaiono in almeno una delle proposizioni dei sequenti nella regola. in altre parole, una regola è valida se supposto che tutti i suoi sequenti premessa siano veri su una riga allora il sequente conclusione della regola è pure vero sulla stessa riga. diremo pure informalmente che una regola è valida se conserva la verità dei sequenti su ogni riga dall'alto verso il basso.
Questo vale per le regole:

- ad una premessa (un solo sequente nella parte superiore dell'albero)
- a due premesse (due sequenti nella parte superiore dell'albero)

Proposition 9.10 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\boldsymbol{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\boldsymbol{\Gamma_1}^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}}) \rightarrow (\boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}})$$

è una **tautologia**.

Proposition 9.11 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \qquad \boldsymbol{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\boldsymbol{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}}) \,\&\, (\boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}}) \rightarrow (\boldsymbol{\Gamma_3^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_3^{\vee}})$$

è una **tautologia**.

Se una regola di inferenza di sequenti nel linguaggio proposizionale è valida, allora conserva la validità tautologica dei sequenti, nel senso che se i suoi sequenti premessa sono tautologie allora anche il sequente conclusione è una tautologia.
Una serie di lemmi/scorciatoie:

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1*:
su OGNI riga r

$$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1}$$

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \textbf{NON è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1bis*:
esiste una riga r tale che

$$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\boldsymbol{\Gamma_1}$, $\boldsymbol{\Gamma_2}$ e $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2*:
su OGNI riga r

$$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{1}$$

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \qquad \textbf{NON è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2bis*:
esiste una riga r su cui

$$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\boldsymbol{\Gamma_1}$, $\boldsymbol{\Gamma_2}$, $\boldsymbol{\Gamma_3}$ e $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\boldsymbol{\Delta_3}$

Tutte le regole del calcolo dei sequenti sono valide, nell'ordine:

- l'assioma identità
- l'assioma per il falso
- lo scambio a sx
- lo scambio a dx
- la & a destra
- la & a sinistra
- la V a destra
- la V a sinistra
- la NOT
- l'implicazione

9.12 Esercizi su formalizzazione in sequente e come regola e loro validità

1. Formalizzare in sequente

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Non mangio gli spinaci.}\\ \text{Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.}\end{array}}{\text{Non mi piacciono gli spinaci.}}$$

utilizzando:
M=mangio gli spinaci
P=mi piacciono gli spinaci

e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

Nel caso positivo il sequente è una tautologia, perchè??

Soluzione:
L'asserzione si formalizza ad esempio nel sequente

$$\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P$$

che è una tautologia per il teorema 9.16 perchè si deriva ad esempio in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\neg M, P \vdash P}}{\neg M \vdash \neg P, P}\neg\text{-D}}{\neg M \vdash P, \neg P}\mathrm{sc_{dx}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{M \vdash M, \neg P}}{M, \neg M \vdash \neg P}\neg\text{-S}}{\neg M, M \vdash \neg P}\mathrm{sc_{sx}}}{\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P}\rightarrow\text{-S}$$

2. Formalizzare in regola la seguente

$$\frac{\textbf{Ad Alice piacciono gli spinaci} \vdash \textbf{Alice mangia gli spinaci}}{\textbf{Alice non mangia gli spinaci} \vdash \textbf{Ad Alice non piacciono gli spinaci}}$$

utilizzando:
S= **Alice mangia gli spinaci**
P=**Ad Alice piacciono gli spinaci**

e stabilire quale è la regola e la proposizione formale corrispondente alla validità della regola e infine stabilire se la regola è valida.

Soluzioni:

(a) la proposizione corrispondente alla validità della regola è

$$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) \ \rightarrow \ (\neg\mathbf{S} \rightarrow \neg\mathbf{P})$$

(b) la regola ottenuta è:

$$\frac{\mathbf{P} \vdash \mathbf{S}}{\neg\mathbf{S} \vdash \neg\mathbf{P}}$$

Per mostrare la validità della regola usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r
(2) $\neg\mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\neg\mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r.

Dall'ipotesi (2) ne segue che $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ su r e da ciò unito all'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ su r e quindi $\neg\mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Dunque la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatorial 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

Le regole sono dette *sicure* se anche le regole *inverse* sono valide rispetto alle tabelle di verità.
La regola inversa di una regola del tipo (caso una e due premesse):

Def. 9.17 (regola inversa ad una premessa) La regola **inversa** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma'\vdash\Delta'}\ *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma\vdash\Delta}\ * - \mathbf{inv}$$

Def. 9.18 (regola inversa ad due premesse) Le regole **inverse** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1\vdash\Delta_1 \qquad \Gamma_2\vdash\Delta_2}{\Gamma'\vdash\Delta'}\ *$$

sono DUE e sono le seguenti

$$\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma_1\vdash\Delta_1}\ * - \mathbf{inv1} \qquad \frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ * - \mathbf{inv2}$$

La *verità* su una riga scende dall'alto verso il basso al sequente radice se tutte le foglie sono vere sulla riga e la verità anche sale su una riga dal basso verso l'alto dal sequente radice verso ogni singola foglia.
Similmente, anche la *falsità* scende da una singola foglia fino alla radice.
Si osservi infine che la procedura di decisione termina sempre su ogni sequente se applichiamo le regole di scambio solo quando è necessario per poter poi applicare la regola di un connettivo in quanto le regole dei connettivi diminuiscono la complessita dei sequenti coinvolti e si arriva ad un punto in cui non abbiamo più proposizioni composte e quindi non possiamo più applicare regole di connettivi (eventualmente precedute dall'applicazione di regole di scambio).

Illustriamo qui un **modo alternativo** per vedere se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una tautologia o un'opinione o un paradosso. Questo metodo consiste nel procedere come segue.

1. Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si costruisce un albero di regole dal basso verso l'alto ponendo il sequente come radice fino ad arrivare ad avere foglie che sono o assiomi del calcolo $\mathbf{LC}_P$ oppure sono sequenti che non sono assiomi e sono senza proposizioni composte;
2. se l'albero ottenuto è di derivazione allora il sequente è una tautologia altrimenti è NON valido;
3. se il sequente è NON valido per stabilire se è un'opinione si cerchi *un'assegnazione delle variabili proposizionali del sequente, ovvero una riga della tabella del sequente radice, che rende TUTTE VERE le FOGLIE dell'albero*. Se **una tal riga esiste** allora il sequente di partenza è **un'opinione**. Se invece **si dimostra che una tal riga non esiste** allora il sequente di partenza è un **paradosso**.

Un calcolo si dice inoltre *decidibile* se tramite il calcolo, la proposizione è decidibile, cioè:

- ha tutte regole sicure
- le regole diminuiscono in complessità dal basso verso l'alto
- gli scambi sono applicati solo quando necessario.

Grazie al fatto che tutte le regole sono sicure, si possono scegliere a piacere i connettivi da applicare. Infatti, *non esiste procedura di decisione su regole non sicure*.

Esempio

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie o opinioni o paradossi motivando la risposta:

1. $\dfrac{\text{O esco la sera e quindi mi diverto, oppure mi riposo se non esco la sera.}}{\text{O mi diverto o mi riposo.}}$

   si consiglia di usare:
   E=esco la sera
   D=mi diverto
   R= mi riposo

   Soluzione: l'asserzione si può formalizzare in tal modo

$$(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

Applicando la procedura di decisione in sezione 9.4.1 si ottiene

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{E,D\vdash D,R}}{E\&D\vdash D,R}\,\&\text{-S} \qquad \dfrac{\dfrac{E\vdash D,R}{\vdash \neg E,D,R}\,\neg\text{-D} \quad \overset{\textbf{ax-id}}{R\vdash D,R}}{\neg E\to R\vdash D,R}\,\to\text{-S}}{(E\&D)\vee(\neg E\to R)\vdash D,R}\,\vee\text{-S}}{(E\&D)\vee(\neg E\to R)\vdash D\vee R}\,\vee\text{-D}$$

Dalla foglia che non si chiude $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ deduciamo che il sequente di partenza è NON valido perchè falso sulla riga che assegna $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Si poi vede facilmente che per $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ ove i valori di $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ sono assegnati a piacere, si ha $\mathbf{D} \vee \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ovvero la foglia $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ risulta vera su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e dunque per la validità delle regole di $\mathbf{LC}_p$ usate nell'albero sopra, il sequente radice $(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ risulta vero su tali righe e si conclude che esso è **soddisfacibile**.

La risposta finale è che il sequente

$$(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

è un'**opinione** perchè è falso sulla riga $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ed è vero su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e con i valori di $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ assegnati a piacere.

Con il termine *teoria proposizionale* si intende un'estensione del calcolo della logica classica proposizionale LC_p con un numero finito di assiomi extralogici indicati in una lista e le seguenti regole di composizione a sinistra

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \mathtt{fr}, \boldsymbol{\Gamma}'' \vdash \nabla}{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}', \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una proposizione (o più genericamente "formula") del linguaggio proposizionale della teoria

Ovvero in breve

TEORIA proposizionale = LOGICA proposizionale + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

11.1 Come derivare in una teoria

Se la teoria $\mathcal{T}$ è fatta da assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

la regola di composizione si può usare in due modi:

1. **Uso della regola di composizione su assiomi:**

   Le formule $\mathtt{fr}$ che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_p$ di $\mathtt{fr}$ con l'uso di assiomi extralogici $\text{Ax}.\mathbf{i_1}, \text{Ax}.\mathbf{i_2} \ldots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* $\mathcal{T}$ componendo con gli assiomi.

   Infatti, per esempio se abbiamo una *derivazione* π *ottenuta con due assiomi*

$$\frac{\pi}{\text{Ax}.\mathbf{i_1}, \text{Ax}.\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}$$

   si può comporre questa derivazione con la regola di composizione *fino a trovare una derivazione di* $\vdash \mathtt{fr}$ *nella teoria* $\mathcal{T}$ *in tal modo*

$$\frac{\vdash \text{Ax}.\mathbf{i_1} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax}.\mathbf{i_2} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax}.\mathbf{i_1}, \text{Ax}.\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}}{\text{Ax}.\mathbf{i_1} \vdash \mathtt{fr}}\ \text{comp}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \text{comp}$$

   $\Rightarrow$ $\mathtt{fr}$ diventa **teorema della teoria T**.

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è *già dimostrato il teorema* $\vdash \mathtt{T}_1$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1}$$

allora *si può usare la formula* $\mathtt{T}_1$ *come premessa per derivare un'altra formula* T_2.
Se ci si riesce trovando una derivazione nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}$$

allora **si può comporre le derivazioni** π_1 **e** π_2 **con comp**
per ottenere una derivazione di $\vdash \mathtt{T}_2$ (senza premesse)!! nella teoria
in tal modo

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}}{\vdash \mathtt{T}_2}\ \text{comp}$$

ovvero
in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti**

11.2 Esempi di teorie proposizionali con esercizi

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   utilizzando:
   C=Chiara va in bici
   P=Pina va in bici
   G=Giorgio va in bici
   F= Fabio va in bici
   E= Elia va in bici

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:
   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Elia va in bici.

Soluzione

- Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

$$C \,\&\, P$$

- Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

$$P \rightarrow G \vee F$$

- Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

$$F \rightarrow \neg C$$

- Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

$$\neg E \rightarrow \neg C$$

- T5. Fabio non va in bici.

$$\vdash \neg F$$

  si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ F \vdash F\end{array}}{\vdash \neg F, F}\ \neg\text{–D}}{\vdash F, \neg F}\ \text{sc}_{\text{ax}} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ C, P \vdash C, \neg F\end{array}}{C \,\&\, P \vdash C, \neg F}\ \&\text{S}}{\vdash C, \neg F}\ \text{comp}}{\neg C \vdash \neg F}\ \neg\text{S}}{F \rightarrow \neg C \vdash \neg F}\ \rightarrow\text{–S}}{\vdash \neg F}\ \text{comp}$$

- T6. Giorgio va in bici.

$$\vdash G$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \ \text{Ax 2.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash \ P, G\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ G \vee F \ \vdash \ G\end{array}}{P \ \to \ G \vee F \vdash G}\ \to\text{–S}}{\vdash G}\ \text{comp}$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \ \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ C\,,\, P \ \vdash \ P, G\end{array}}{C \,\&\, P \ \vdash \ P, G}\ \&\text{–S}}{\vdash \ P, G}\ \text{comp}$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ G \ \vdash \ G\end{array} \qquad \dfrac{\vdash \ \text{T5.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ F \vdash F\,,\, G\end{array}}{F\,,\, \neg F \ \vdash \ G}\ \neg\text{–S}}{F \ \vdash \ G}\ \text{comp}}{G \vee F \ \vdash \ G}\ \vee\text{–S}$$

- T7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash \ \mathbf{F} \to \neg\mathbf{C}$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$\begin{array}{c}\textbf{Ax.3}\\ \vdash \ \mathbf{F} \to \neg\mathbf{C}\end{array}$$

è già una derivazione!!

- T8. Elia va in bici.

$$\vdash \ \mathbf{E}$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \ \text{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ E \ \vdash \ E\end{array}}{\vdash \ \neg E\,,\, E}\ \neg\text{–S} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \ \text{Ax.1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ C\,,\, P \ \vdash \ C\,,\, E\end{array}}{C \,\&\, P \ \vdash \ C\,,\, E}\ \&\text{–S}}{\vdash \ C\,,\, E}\ \text{comp}}{\neg C \ \vdash \ E}\ \neg\text{–S}}{\neg E \to \neg C \ \vdash \ E}\ \to\text{–S}}{\vdash \ \mathbf{E}}\ \text{comp}$$

In un linguaggio predicativo, ha dei termini (variabili o insiemi di variabili-lettere minuscole o costanti) e predicati (atomici/singoli o composti).
Attenzione, in questo a <u>come mettere le parentesi</u>:

Nello scrivere i predicati $\forall$ o $\exists$ si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione $\neg$, seguito a pari merito da $\vee, \&$, che a loro volta sono legate alle formule più di $\rightarrow$.

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \quad \textbf{lega più di} \quad \vee, \& \quad \textbf{lega più di} \quad \rightarrow$$

I predicati servono per formalizzare asserzione del tipo

Tutti gli uomini sono mortali
Socrate è un uomo

Socrate è mortale

ove si è adottato la convenzione (con la sbarra) in sezione 5. A tal scopo usiamo i seguenti predicati

M(x)="x è mortale"
U(x)="x è un uomo"
e introduciamo la costante $\overline{\mathrm{s}}$ per esprimere il nome "**Socrate**":

Poi per esprimere il "**tutti**" usiamo il simbolo di **quantificazione universale** "**per ogni**" davanti a un predicato e formalizziamo la frase "Tutti gli uomini sono mortali" in tal modo

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )$$

mentre "Socrate è un uomo" e "Socrate è mortale" si formalizzano rispettivamente in $\mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}})$ e in $\mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante* $\overline{\mathbf{s}}$.

Infine l'intera asserzione sopra si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}\ ), \mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$$

Vediamo infatti che:

$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}\ )$ traduce

Tutti i P(x) sono Q(x)
Chi è P(x) è pure Q(x)
Quelli che sono P(x)... sono Q(x)
I P(x) sono Q(x)
Un P(x) è un Q(x)
Chiunque è P(x), è pure Q(x)
Ogni P(x) è Q(x)
Soltanto i Q(x) sono P(x)
Se uno è P(x) allora è pure Q(x)
Solo se uno è Q(x) allora è pure P(x)

$\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)}\ \&\mathbf{Q(x)}\ )$ traduce

C'è un P(x) che è Q(x)
esiste un P(x) che è Q(x)
qualche P(x) è Q(x)
esistono dei P(x) che sono Q(x)

$\neg\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)}\ \&\mathbf{Q(x)}\ )$ traduce

nessun P(x) è un Q(x)
non esiste un P(x) che è Q(x)
non esistono P(x) che sono Q(x)

Trucco *per tradurre* **soltanto quelli, solo quelli che**

- riscrivere la frase *togliendo* il *"soltanto", o "solo"*

- tradurre la frase ottenuta usando la quantificazione universale e l'implicazione

- se la frase ottenuta è $\forall x\ (\ \mathbf{fr_1}(x) \rightarrow \mathbf{fr_2}(x)\ )$ allora la traduzione della frase iniziale si ricava *SCAMBIANDO antecedente* con *conseguente*, ovvero scrivendo $\forall x\ (\ \mathbf{fr_2}(x) \rightarrow \mathbf{fr_1}(x)\ )$

Esempi di predicati

L'asserzione **"Se Mario non mangia allora non sta in piedi"**

si può formalizzare così

$$\neg \mathbf{M}(\overline{\mathbf{m}}) \rightarrow \neg \mathbf{P}(\overline{\mathbf{m}})$$

ove
M(x)="x mangia"
P(x)= "x sta in piedi"
$\overline{\mathbf{m}}$="Mario"

L'asserzione

"Chi non mangia non sta in piedi"

è formalizzabile così

$$\forall \mathbf{x} \; (\neg \mathbf{M}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{P}(\mathbf{x}))$$

ponendo

M(x)="x mangia"
P(x)= "x sta in piedi"

L'asserzione

"Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo."

si può formalizzare così

$$\forall \mathbf{x} \; (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}))$$

con
B(x)= " x ha il biglietto"
S(x)= "x sale sull'aereo"

L'introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: le variabili *libere*, che sono variabili all'interno di una formula senza quantificatori legati ad esse, e le variabili *vincolate*, che sono variabili che cadono nel raggio di azione di un quantificatore.
Banalmente:
- vincolata, è per esempio y in una frase che usa y con quantificatori
- libera, è per esempio y in una frase che NON usa y con quantificatori

Aggiungiamo quindi gli ultimi quantificatori al calcolo dei sequenti:

$$\overset{\textbf{ax-id}}{\Gamma, \mathtt{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{fr}_1, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathtt{fr}_1, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \rightarrow \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \rightarrow \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{fr[x/w]} \,,\, \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \,,\, \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \,,\, \nabla)) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma},\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \,,\, \mathbf{fr[x/t_{ter}]} \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma} \,,\, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma},\ \mathbf{fr[x/w]} \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{fr}, \mathbf{\Delta})) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{fr[x/t_{ter}]} \,,\, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \,,\, \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{fr} \,,\, \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t_{ter}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Sigma \,,\, t_{ter} = s_{ter} \,,\, \Gamma(t_{ter}) \ \vdash\ \Delta(t_{ter}) \,,\, \nabla}{\Sigma \,,\, \Gamma(s_{ter}) \,,\, t_{ter} = s_{ter} \ \vdash\ \Delta(s_{ter}) \,,\, \nabla}\ = -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\overset{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter} \,,\, \Delta}$$

Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall-$D o $\exists-$S controllare le **condizioni su variabili**:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A(z)\vdash A(z)}\end{array}}{\mathbf{A(z)\vdash \forall z\ A(z)}}\ \forall-\text{D}\ \textbf{NO!!!}}{\mathbf{\exists z\ A(z)\vdash \forall z\ A(z)}}\ \exists-\text{S} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A(z)\vdash A(z)}\end{array}}{\mathbf{\exists z\ A(z)\vdash A(z)}}\ \exists-\text{S}\ \textbf{NO!!!}}{\mathbf{\exists z\ A(z)\vdash \forall z\ A(z)}}\ \forall-\text{D}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare $\forall-$D perchè **z** è libera nel contesto a **sx** di $\vdash$ ovvero in $\mathbf{A(z)\vdash \forall z\ A(z)}$
e nella seconda NON si può applicare $\exists-$S perchè **z** è libera nel contesto a **dx** di $\vdash$ ovvero in $\mathbf{\exists z\ A(z)\vdash A(z)}$.

12.2.3 Esempi di derivazione: uso delle regole $\forall-$S e $\exists-$D

Nel calcolo **LC** possiamo derivare il sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)\to M(x)}\ )\ ,\mathbf{U(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}$$

in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ ),\ M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})\end{array}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,U(\overline{s})\to M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \to-\text{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,U(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\forall-$S mettendo al posto della metavariabile **t** il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola $\forall-$S per esempio con la variabile **x**

$$\dfrac{\dfrac{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,U(x)\to M(x)\vdash M(\overline{s})}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,U(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Anche se grazie al fatto che la regola $\forall-$S è sicura si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ ),\ M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})\end{array}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,\ U(\overline{s})\to M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \to-\text{S}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,\ U(x)\to M(x)\vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\to M(x)\ )\ ,U(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Inoltre l'asserzione composta

$$\dfrac{\textbf{Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile}}{\textbf{Qualche antenato di Mario è nobile}}$$

si può formalizzare nel sequente

$$\mathbf{A(c,\overline{m})\ \&\ N(c)\ \vdash\ \exists x\ (\ A(x,\overline{m})\ \&\ N(x)\ )}$$

ove si pone
$\mathbf{A(x,y)}$ = **"x è antenato di y"**
$\mathbf{N(x)}$ = **"x è nobile"**
$\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**
c="Il conte Augusto"

Possiamo derivare il sequente in LC in tal modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{A(c,\overline{m})\ \&\ N(c)\ \vdash\ A(c,\overline{m})\ \&\ N(c), \exists x\ (\ A(x,\overline{m})\ \&\ N(x)\ )}\end{array}}{\mathbf{A(c,\overline{m})\ \&\ N(c)\ \vdash\ \exists x\ (\ A(x,\overline{m})\ \&\ N(x)\ )}}\ \exists-\text{D}$$

Per formalizzare l'unicità in logica predicativa, aggiungiamo proprio il predicato di uguaglianza, dando quindi la *logica predicativa con uguaglianza*.

Esempio 2: come formalizzare in logica classica

"Il programma fattoriale assegna ad ogni input un'unico output."

con
$O(x, y, z)$= "il programma y su input z dà output il numero x"
f="il programma fattoriale"

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\forall \mathbf{z}\ \ (\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{z})\ \&\ \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1}, \mathbf{f}, \mathbf{z})\ \&\ \mathbf{O}(\mathbf{y_2}, \mathbf{f}, \mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y_1}=\mathbf{y_2}\ )\ )$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\forall \mathbf{z}\ \ \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{z})\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y}=\mathbf{x}\ )\ )$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

"Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi"

con
$\mathbf{O}(\mathbf{x})$= "x è potente"
$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$="x pensa a y"

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists\ \mathbf{x}\ (\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x})\ )\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y}=\mathbf{x}\ )\ )$$

Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla} = -\mathrm{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con s_{ter}
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con t_{ter}.

Ad esempio nella derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathbf{t}{=}\mathbf{s} \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}, \mathbf{f}{=}\mathbf{t}}\ {=}\text{-ax}}{t{=}s \vdash s{=}t, f{=}t}\ = -\mathrm{S}}{t{=}s \vdash f{=}t, s{=}t}\ \mathrm{sc_{sx}}}{t{=}s \vdash f{=}s, s{=}t}\ = -\mathrm{S}$$

nella prima applicazione non abbiamo sostituito tutte le occorrenze di $\mathbf{s}$ con $\mathbf{t}$ ma solo alcune.

Esempio 0: Vediamo che l'enunciato

"Tutti sono uguali a se stessi"

formalizzato con la formula

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, e quindi è una tautologia rispetto alla logica classica con uguaglianza

$$\cfrac{\cfrac{}{\vdash w = w}\ = -\mathrm{ax}}{\vdash \forall x\ x = x}\ \forall-\mathrm{D}$$

La *sostituzione* di un termine non è sempre lecita, in quanto la sostituzione deve per forza conservare la validità in quanto *la frase con "x" è vera se ogni frase che contiene "x" è vera*.

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\mathtt{pr(x)}$
controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\mathtt{pr(x)}$ -
la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y
sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\frac{\exists y\ y < y \vdash \nabla}{\forall x\ \exists y\ x < y \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}_v \qquad \text{NOOOOO!!!!}$$

$$\frac{\forall y\ y = a \vdash y = z}{\forall y\ y = a \vdash \forall x\ x = z}\ \forall\text{−D} \qquad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di ∀-S o ∃-D sono lecite assumendo di aver esteso il linguaggio formale con il simbolo della **funzione** somma +
in modo tale che
$\mathbf{t_1 + t_2}$ è un **termine** dati $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ **termini**.
Quindi ad esempio $\mathbf{y+z}$ è un termine che indica la somma di $\mathbf{y}$ con $\mathbf{z}$.

1. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x = y + z, \qquad \exists x\ x = x + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x = y + z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

??

NO, perchè la sostituzione di y con x NON è lecita (dal basso verso l'alto) perchè aumenta il potere di azione di $\exists x$

2. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x = y + z, \qquad \exists x\ x = z + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x = y + z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

??

SÌ perchè è lecita la sostituzione in quanto z è libera nel sequente conclusione.

3. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x = z + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x = y + z}\ \forall\text{−D}$$

??

NO ma per la condizione sull'applicazione di ∀−D (e non per errori di sostituzione!) perchè z è libera nel sequente conclusione.

Tutto questo fa parte di un *dominio* (non vuoto), di cui fanno parte costanti ed elementi di predicati/funzioni come segue:

costante $\mathbf{c_j}$	$\rightsquigarrow$	*elemento di dominio* $\mathbf{c_j}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathbf{D}$
predicato **atomico** $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}$	$\rightsquigarrow$	*funzione* $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0,1\}$ *se* $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ *è il suo numero di variabili libere*
variabile proposizionale **B** *ovvero predicato* **atomico** *senza variabili libere*	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{0,1\}$

Ad esempio se consideriamo il linguaggio predicativo arricchito della sola costante $\mathbf{c}$ allora

$\mathbf{D} \equiv$ numeri naturali
$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{5}$

definisce un modello ove l'interpretazione dell'uguaglianza risulta la funzione seguente:

$$(\mathbf{x}=\mathbf{c})^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

ove per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{x}=\mathbf{c})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv 1 \quad \text{sse} \quad \mathbf{d}=\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \quad \text{sse} \quad \mathbf{d}=\mathbf{5}$$

Possiamo inoltre costruire un modello per rendere vera l'argomentazione considerata all'inizio di sezione 12.1.4

Tutti gli uomini sono mortali
Socrate è un uomo
___
Socrate è mortale

mantenendo il significato dei simboli formali

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$= "**x** *è mortale*"
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$= "**x** *è un uomo*"
$\overline{s}$ = "Socrate".

definendolo in tal modo:

$\mathbf{D}$= *L'insieme degli esseri viventi esistiti ed esistenti sulla terra.*
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "**d** *è mortale*" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "**d** *è un uomo*" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = "*Socrate*".

Conveniamo che con la scrittura
$\mathtt{fr}(x_1,\ldots,x_n)$ si intende una formula α ovvero $\mathtt{fr}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \alpha$
con **variabili libere** incluse nella lista $x_1,\ldots,x_n$
ovvero $\mathbf{VL}(\alpha) \subseteq \{ x_1,\ldots,x_n \}$

ed inoltre conveniamo che

se una variabile x_n **NON compare proprio** in $\mathtt{fr}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \alpha$
ovvero $x_n \notin \mathbf{VL}(\ \alpha\ )$
allora per ogni n-upla $(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)$ in $\mathbf{D}^n$

lista di n-elementi con $\mathbf{d_n}$		lista di $n-1$-elementi SENZA $\mathbf{d_n}$
$\mathtt{fr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{n-1}},\mathbf{d_n})$	$=$	$\alpha^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{n-1}})$

se $\mathbf{fr}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \alpha$ è formula **SENZA** variabili libere

allora per ogni n-upla $(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)$ in $\mathbf{D}^n$

lista di n-elementi con $\mathbf{d_n}$		costante proposizionale
$\mathbf{fr}(x_1,\ldots,x_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{n-1}},\mathbf{d_n})$	$=$	$\mathbf{fr}(x_1,\ldots,x_n)^{\mathbf{D}} = \alpha^{\mathbf{D}}$

Ora siamo pronti a definire l'interpretazione di predicati generici, ciascuno definito per induzione.

L'interpretazione di un **predicato composto** $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})$ in $\mathcal{L}$ è una FUNZIONE del tipo

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(-,\ldots,-) : \mathbf{D}^n \rightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

I casi speciale sono il *per ogni* e l'*esiste*:

$$(\ \forall\mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$
sse
PER OGNI $\mathbf{d}$ $\quad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$= **1**

$$(\ \exists\mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$
sse
ESISTE un $\mathbf{d}$ $\quad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$= **1**

ovvero

ESISTE un testimone $\mathbf{d}$ della verità di $\exists\mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})$

La verità di un predicato esiste sia senza che con una sola variabile libera in un modello. In generica, la verità generica è così dettagliata:

una **formula**

$\mathbf{fr(x_1, \ldots, x_n)}$ *è* **VERA** *in un modello* $\mathcal{D}$

se e solo se

PER OGNI $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \varepsilon \mathbf{D}^n$ $\quad \mathbf{fr(x_1, \ldots, x_n)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$

se e solo se

$(\forall\, \mathbf{x_1}\ \forall\, \mathbf{x_2} \ldots \forall\, \mathbf{x_n} \quad \mathbf{fr(\, x_1, x_2, \ldots, x_n)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

Modelli e contromodelli

Modo semplice per definire un modello

Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ e **predicati atomici** $\mathbf{P(x)}$ e $\mathbf{Q(x,y)}$ e un dominio

$$\mathbf{D}$$

consideriamo il linguaggio esteso $\mathcal{L}^{\mathbf{D}}$ con nuove costanti

$$\bar{\mathbf{d}}$$

che sono i nomi degli elementi di $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ e quindi definiamo un **modello**

$$(\ \mathbf{D}\ ,\ \mathbf{P(x)^D}\ ,\ \mathbf{c_1^D}\ ,\ \mathbf{c_2^D}\ ,\ (\bar{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}})_{\mathbf{d \in D}}\ )$$

ponendo SEMPRE

$$\bar{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}} = \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

e poi definiamo a piacere l'interpretazione delle costanti

$$\mathbf{c_1^D} \in \mathbf{D} \qquad \mathbf{c_2^D} \in \mathbf{D}$$

e dei predicati **atomico** USANDO i nomi degli elementi di D

$$\begin{array}{llcl} \mathbf{P(x)}^{\mathcal{D}}(-) & \mathbf{D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0,1}\} \\ & \mathbf{d} & \mapsto & \mathbf{P(\bar{d})}^{\mathcal{D}} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} \mathbf{Q(x,y)}^{\mathcal{D}}(-) & \mathbf{D \times D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0,1}\} \\ & (\mathbf{d_1, d_2}) & \mapsto & \mathbf{Q(\,\bar{d_1}\ ,\ \bar{d_2}\,)}^{\mathcal{D}} \end{array}$$

$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{pr(x)}$ è **vero** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio D

sse

PER OGNI $d \in \mathcal{D}$ $\quad \mathbf{pr(x)}^{\mathcal{D}}(d) = 1$

sse

PER OGNI $d \in \mathcal{D}$ $\quad \mathbf{pr(\bar{d})}^{\mathcal{D}} = 1$

$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{pr(x)}$ è **vero** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio $\mathbf{D}$

sse

ESISTE $d \in \mathcal{D}$ tale che $\quad \mathbf{pr(x)}^{D}(d) = 1$

sse

ESISTE $d \in \mathcal{D}$ tale che $\quad \mathbf{pr(\bar{d})}^{\mathcal{D}} = 1$

Per indicare un modello con dominio D scriviamo:

$$\mathcal{D} \equiv (\mathbf{D}, \mathbf{c_j}^{\mathcal{D}}, \mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}})$$

ma più spesso indicheremo un modello semplicemente con

$$\mathcal{D}$$

per **falsificare** una formula con una variabile libera $\mathbf{pr}(\mathbf{x})$ in un modello $\mathcal{D}$
BASTA TROVARE un FALSARIO d
tale che

$$\mathbf{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\mathbf{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

se il modello ha tutti i nomi degli elementi del dominio

e quindi **NON c'è bisogno che TUTTI gli elementi d del dominio D** risultino **falsari** della funzione che interpreta $\mathbf{pr}(\mathbf{x})$!!!.

Da qui introduciamo la nozione di *contromodello*, quindi rendere falsa una formula trovando un falsario.

1. La formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

è **falsa** in tal modello che diventa un suo **contromodello**:

$\mathbf{D} = \{\mathtt{Topolino}, \mathtt{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ è maschio

In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che

$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$

perchè

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

ovvero $\mathtt{Minni}$ è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) \to (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\ &= (A(\widetilde{\mathtt{Topolino}}))^{\mathcal{D}} \to \forall \mathbf{d} \in \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{d}}) \\ &= \mathbf{1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

perchè

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Topolino}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

mentre $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero $\mathtt{Topolino}$ è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Abbiamo quindi questo parallelismo tra concetti per il linguaggio proposizionale e predicativo:

	Linguaggio proposizionale	Linguaggio predicativo
sintassi	proposizione	predicati
Variabili	A, B, C, ...	K, A(x), B(y), C(x,y), ...
verità globale	tabella di verità	I modelli
verità locale	riga di tabella	UN modello
validità	proposizione **valida** **tautologia** =**sua tabella con TUTTI 1**	predicato **valido** **tautologia** = **vero in TUTTI i modelli**
NON validità	proposizione **NON valida** = **sua tabella con UNA riga 0**	predicato **NON valido** = **falso in UN modello** detto **CONTROMODELLO**
soddisfacibilità	proposizione **soddisfacibile** = **sua tabella con UNA riga 1**	predicato **soddisfacibile** =**vero in UN modello**
INsoddisfacibilità	proposizione **INsoddisfacibile** **paradosso** =**sua tabella con TUTTI 0**	predicato **INsoddisfacibile** **paradosso** =**falso in TUTTI i modelli**

Concludiamo aggiungendo pure che

> un **predicato**, chiamato anche **formula**, `fr` è **OPINIONE** nella semantica classica
> se `fr` è **NON VALIDO** e **SODDISFACIBILE**
> ovvero `fr` è **falso** in **UN modello** ed è **vero** in **un ALTRO modello**.

Le tabelle di verità non sono più sufficienti per catturare la nozione di validità di un predicato in quanto occorre verificare controllare la sua validità in ogni modello. In pratica un modello per una formula corrisponde ad una riga della tabella di verità per una proposizione.

Esempi di classificazione di formule

1. Nel seguente modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}$
$a^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$
$b^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$.
$\widetilde{\mathtt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$
$\widetilde{\mathtt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$
$\widetilde{\mathtt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Topolino}$

la formula

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è **vera**.

Infatti

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\mathtt{Minni}} = \widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni} = \mathbf{b}^{\mathcal{D}}$

Ma invece

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è **falsa** nel modello

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}$
$b^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$
$a^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$.
$\widetilde{\mathtt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$
$\widetilde{\mathtt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$
$\widetilde{\mathtt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Topolino}$
dato che

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\mathtt{Minni}} = \widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni} \neq \mathbf{b}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$.

Quindi la formula $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ o analogamente il sequente

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è un' **opinione** perchè c'è un modello in cui è falso (il secondo) e un modello in cui è vero (il primo).

La formula

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )$$

è **vera** nel modello

D= Esseri viventi (esistiti ed esistenti)
M(x)= "x è mortale"
U(x)= "x è un uomo"

dove vale $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali.

Mentre $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )$ è **falsa** nel modello

D= $\{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Topolino}, \mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ *è maschio*
$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ *è femmina*

in quanto si ha $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$
perchè esiste un **falsario** che è $d = \mathtt{Minni}$ per cui vale $(\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ dato che $\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$ e quindi

$$\begin{aligned}(\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) &= \mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni})\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) \\ &= U(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ U(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}} \\ &= \mathbf{1}\ \rightarrow\ \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che pure $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )$ è un' **opinione**.

Similmente a quanto detto in altro punto sopra, un sequente è vero/tautologia/non valido/soddisfacibile/non valido/paradossale se è tale (una di quelle definite) in tutti i modelli
Invece, è opinione se non valido e soddisfacibile oppure è falso in un modello ma vero in un altro modello.

Come falsificare un sequente predicativo

per **falsificare un sequente predicativo** *SENZA* **variabili libere**

$$\mathtt{pm_1}, \ldots, \mathtt{pm_n} \vdash \mathtt{cl_1}, \ldots, \mathtt{cl_m}$$

ove $\mathtt{pm}_i$ sono formule predicative poste come **premesse** e $\mathtt{cl}_i$ sono formule predicative poste come **conclusioni**

significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui risulta

$$(\mathtt{pm_i})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad (\mathtt{cl_j})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathtt{pm_1}, \ldots, \mathtt{pm_n} \vdash \mathtt{cl_1}, \ldots, \mathtt{cl_m}$ è

$$\neg(\ (\mathtt{pm_1}\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}\ \rightarrow (\mathtt{cl_1}\ \ \vee\ \ \mathtt{cl_2})\ \ \vee\ \ \ldots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl_m}\ )$$

che equivale a

$$(\ \mathtt{pm_1}\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}\ )\ \ \&\ \ (\ (\neg\mathtt{cl_1}\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl_2})\ \ \&\ \ \ldots\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl_m})$$

e questa negazione nel modello $\mathcal{D}$ risulta difatti VERA solo se

$$(\mathtt{pm_i})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad (\mathtt{cl_j})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

Se si tratta di sequenti senza variabili libere, si procedere come appena descritto.
Invece, distinguiamo se abbiamo delle premesse (prima del segno di sequente) o conclusioni (prima del segno di sequente), se in presenza di falsari se la negazione del modello è vera e, in tal caso, esistono dei *testimoni*.

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathtt{cl}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI -

$$\vdash \mathtt{cl}_1(\overline{\mathbf{y}}), \dots, \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$$

ove $\overline{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y_1}, \dots \mathbf{y_k}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_k}$ tali che

$$(\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \dots \mathbf{d_k}) = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\vdash \mathtt{cl}_1(\overline{\mathbf{y}}), \dots, \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$ è

$$\neg\, \forall \mathbf{y_1} \dots \forall \mathbf{y_n}\ (\ \mathtt{tt}\ \rightarrow\ (\mathtt{cl}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_2(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ \ )$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \dots \exists \mathbf{y_n}\ \neg(\ (\mathtt{cl}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_2(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ \ )$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \dots \exists \mathbf{y_n}\ (\neg \mathtt{cl}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \neg \mathtt{cl}_2(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \&\ \ \dots\ \ \&\ \ \neg \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$$

e tale negazione nel modello $\mathcal{D}$ è VERA solo se risulta che esistono **dei testimoni** $\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_k}$ **dell'esistenziale** ovvero dei **FALSARI** dei vari $\mathtt{cl}_j$

$$(\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \dots \mathbf{d_k}) = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m}$$

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathtt{pm}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come PREMESSE e $\mathtt{cl}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI -

$$\mathtt{pm}_1(\overline{\mathbf{y}}), \dots, \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}}) \vdash$$

ove $\overline{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y_1}, \dots \mathbf{y_k}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_k}$ tali che

$$(\mathtt{pm}_\mathbf{i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \dots \mathbf{d_k}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathtt{pm}_1(\overline{\mathbf{y}}), \dots, \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}}) \vdash$ è

$$\neg\, \forall \mathbf{y_1} \dots \forall \mathbf{y_n}\ (\ \ (\mathtt{pm}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ \rightarrow \perp)$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \dots \exists \mathbf{y_n}\ \neg(\ (\mathtt{pm}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ \rightarrow \perp)$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \dots \exists \mathbf{y_n}\ (\ \mathtt{pm}_1(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

e tale negazione nel modello $\mathcal{D}$ è VERA solo se risulta che esistono **dei TESTIMONI** $\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_k}$

$$(\mathtt{pm}_\mathbf{i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \dots \mathbf{d_k}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}$$

Per decidere la validità di formule arbitrarie o sequenti, si ha una procedura semi-automatica che si avvale del calcolo dei sequenti e richiede la costruzioni di contromodelli nel caso di non validità.

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$
passo 1: si prova a derivarlo in $\mathbf{LC}_=$

- se si deriva $\Rightarrow$ è valido ovvero è **tautologia**
- se NON si riesce a derivare vai al passo 2

passo 2: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude
se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **NON valido**
e vai al passo 3
passo 3: prova a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in $\mathbf{LC}_=$
che è $\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ )$ se non ci sono variabili libere
oppure è $\vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ )$ se $\overline{\mathbf{y}}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$

- se si deriva $\Rightarrow$ $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è insoddisfacibile ovvero è **paradossale**
- se NON si riesce a derivare applica il passo 2 alla negazione di $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$
  se trovi contromodello di $\neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ )$ (oppure di $\vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ )$)
  questo è modello di $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$
  che è quindi anche modello di $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$
  $\Rightarrow$ $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **soddisfacibile**
  e siccome è pure non valido allora $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ risulta **OPINIONE**

Consigli su come derivare

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e $\forall$-D e $\exists$-S con VARIABILI NUOVE
applicare le regole $\forall$-S e $\exists$-D con TERMINI presenti nelle formule del sequente
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di una seconda applicazione di $\forall$-S o $\exists$-D

L'interpretazione di un predicato *non* dipende dal *nome* delle variabili ma dipende *solo* dal numero e ordine delle variabili che compaiono nel predicato, in quanto l'interpretazione di un predicato NON dipende dal nome della variabile libera ma solo dal fatto che ce n'è una e l'interpretazione si dà partendo da un'unica variabile libera.

A tal scopo ASSUMIAMO che il contesto delle variabili sia sempre interpretato *secondo l'ordine alfabetico*, ovvero dato $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ l'elemento da sostituire alla variabile $\mathbf{x}$ varia sul PRIMO dominio, ovvero su $\mathbf{d_1}$, mentre quello per la variabile $\mathbf{z}$ (che nell'alfabeto viene dopo ad $\mathbf{x}$) varia sul SECONDO dominio ovvero su $\mathbf{d_2}$. Poi se c'è pure la variabile $\mathbf{w}$ questa varierebbe sul PRIMO dominio perchè nell'ordine alfabetico inglese $\mathbf{w}$ è prima di $\mathbf{x}$.

Esercizio di chiarimento: Si stabilisca la validità e soddisfacibilità o meno del sequente

$$\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$$

Proviamo ad applicare la procedura 12.6.1 e quindi procediamo a derivare

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{A(w)} \vdash \mathbf{A(z)}}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}}\ \exists-\mathrm{D}}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}}\ \forall-\mathrm{D}$$

ove la prima applicazione di $\forall-\mathrm{D}$ è corretta poichè $\mathbf{z}$ non appare libera in $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$ e così pure l'ultima applicazione di $\exists-\mathrm{D}$ è pure corretta perchè $\mathbf{w}$ non appare libera (perchè NON compare proprio) in $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}$.

L'ultima foglia suggerisce di costruire un contromodello falsificando il sequente

$$\mathbf{A(w)} \vdash \mathbf{A(z)}$$

ovvero la formula $\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}$. A tal scopo basta trovare un modello $\mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}\,)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

(ove $\mathbf{w}$ varia sulla prima componente $\mathbf{D}$ del prodotto $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ e $\mathbf{z}$ sulla seconda componente secondo l'ordine alfabetico inglese delle lettere rappresentanti le variabili visto che $\mathbf{w}$ viene prima di $\mathbf{z}$) NON sia la funzione costante $\mathbf{1}$, ovvero esista una coppia $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2})$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}) \ \to\ \mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathcal{D}} \ \to\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

Quindi basta che risulti $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Un tal contromodello è il seguente:
$\mathbf{D} \equiv \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}\}$ con

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

e si noti che per quanto esposto sopra vale pure

$$\mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

e

$$\mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

Quindi in tal modello risulta che

$$\mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

mentre

$$\mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente $\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}$ è **falso** in tal modello e per la sicurezza delle regole del calcolo predicativo $\mathbf{LC}_{=}$, che mostreremo nel seguito, tale modello **falsifica** pure

$$\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$$

che risulta quindi *NON è valido*.

Ora per provare se il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$ è **soddisfacibile** proviamo a derivare la sua negazione ovvero

$$\vdash \neg(\,\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\,)$$

e nel tentativo di derivarlo otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \qquad\qquad \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash}\ \to-\mathrm{S}}{\vdash \neg(\,\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\,)}\ \neg-\mathrm{D}$$

Ora consideriamo la foglia a sx. Si vede che se si prova a continuare a derivare con $\exists-\mathbf{D}$ non si arriva che a ripetere l'esistenziale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A(t)}$. **Conviene fermarsi prima di un'applicazione di $\exists-\mathbf{D}$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**

$$\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$$

(si ricordi che il contesto vuoto a sx si interpreta sempre come vero..) ovvero basta costruire un modello $\mathcal{D}$ in cui vale $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Anche qui si può notare che se si prova a continuare a derivare con $\forall - \mathbf{S}$ non si arriva che a ripetere la formula universale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A(t)}$. **Conviene fermarsi prima di ogni applicazione di $\forall -$S (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**:

$$\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash$$

(si ricordi che il contesto vuoto a dx si interpreta sempre come falso..) ovvero basta costruire un modello $\mathcal{D}$ in cui vale $\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Per esempio possiamo definire

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A(z)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sempre} \end{array}$$

Questo modello è contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\ \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\ )$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$. Abbiamo concluso dunque con un altro tipo di modello che il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$ risulta **soddisfacibile**.

In conclusione il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$ è un' **opinione** avendo trovato un modello in cui è falso e uno in cui è vero.

12.6.3 Esempi di classificazione della verità di un sequente

1. L'argomentazione

$$\frac{\textbf{Se uno è mite e gentile allora è amabile.}}{\textbf{Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.}}$$

si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{M(x)} \& \mathbf{G(x)} \rightarrow \mathbf{A(x)}\ ) \vdash \forall \mathbf{x}(\ \neg \mathbf{G(x)} \rightarrow \neg \mathbf{A(x)} \& \neg \mathbf{M(x)}\ )$$

usando:
M(x)=x è mite
G(x)=x è gentile
A(x)=x è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 12.6.1.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ), A(x) \vdash G(x)$}
\RightLabel{$\neg-$D}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \neg A(x), G(x)$}
\AxiomC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ), M(x) \vdash G(x)$}
\RightLabel{$\neg-$D}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ), \vdash \neg M(x), G(x)$}
\RightLabel{$\&-$D}
\BinaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \neg A(x)\&\neg M(x), G(x)$}
\RightLabel{$\mathrm{sc_{dx}}$}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash G(x), \neg A(x)\&\neg M(x)$}
\RightLabel{$\neg-$S}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ), \neg G(x) \vdash \neg A(x)\&\neg M(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow-$D}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x)\&\neg M(x)$}
\RightLabel{$\forall-$D}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \forall x\ (\ \neg G(x) \rightarrow \neg A(x)\&\neg M(x)\ )$}
\end{prooftree}$$

ove il primo $\forall-$D si applica perchè $\mathbf{x}$ NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... Infatti continuando a derivare la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{M(x),\forall x\,(\dots)\vdash M(x)} \qquad M(x),\forall x\,(\dots)\vdash G(x),G(x)}{M(x),\forall x\,(\dots)\vdash M(x)\&G(x),G(x)}\,\&\text{−D} \qquad M(x),\forall x\,(\dots),A(x)\vdash G(x)}{M(x),\forall x\,(\dots),M(x)\&G(x)\to A(x)\vdash G(x)}\,\to\text{−S}}{M(x),\forall x\,(\,M(x)\&G(x)\to A(x)\,)\vdash G(x)}\,\forall\text{−S}}{\forall x\,(\,M(x)\&G(x)\to A(x)\,),M(x)\vdash G(x)}\,\text{sc}_{\text{dx}}$$

e ci accorgiamo che la foglia

$$\mathbf{M(x)},\ \forall\mathbf{x}\ (\dots)\vdash\mathbf{G(x)},\mathbf{G(x)}$$

in alto a dx risulta equivalente al sequente dell'albero prima di $\forall$−S

$$\mathbf{M(x)},\forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\vdash\mathbf{G(x)}$$

a meno di una ripetizione di $\mathbf{G(x)}$ nelle conclusioni. E analogamente continuando a derivare l'albero sopra con $\forall$−S dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare il sequente dell'albero prima di applicare $\forall$−S, ovvero

$$\mathbf{M(x)},\forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\vdash\mathbf{G(x)}$$

A tal scopo prendiamo un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto qualsiasi e poniamo:
$\mathbf{G(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$,
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$ per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$
e $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}$ è definito a piacere. Poi si noti che

$$(\ \forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

poichè per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{0}$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente

$$\forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ ),\mathbf{M(x)}\vdash\mathbf{G(x)}$$

(ovvero lo falsifica) perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\vdash\forall\mathbf{x}\ (\,\neg\mathbf{G(x)}\to\neg\mathbf{A(x)}\&\neg\mathbf{M(x)}\,)$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole (che mostreremo essere) sicure per arrivare alla foglia

$$\forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ ),\mathbf{M(x)}\vdash\mathbf{G(x)}$$

`MORALE`= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.
In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi procediamo a studiare la soddisfacibilità del sequente di partenza che per comodità abbreviamo come segue

$$\vdash\mathbf{pr_1}\to\mathbf{pr_2}$$

ove $\mathbf{pr_1}\equiv\forall\mathbf{x}(\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )$
$\mathbf{pr_2}\equiv\forall\mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G(x)}\to\neg\mathbf{A(x)}\&\neg\mathbf{M(x)}\ )$.

A tal scopo proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash\neg(\,\mathbf{pr_1}\to\mathbf{pr_2}\,)$$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare $\forall-\mathrm{S}$ inutilmente..)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{M(x), G(x) \vdash A(x)}}{\mathbf{M(x)\&G(x)\vdash A(x)}}\ \&-\mathrm{D}}{\mathbf{M(x)\&G(x)\to A(x)}}\ \to -\mathrm{D}}{\vdash \mathbf{pr_1}}\ \forall-\mathrm{D} \qquad \mathbf{pr_2}\vdash}{\mathbf{pr_1 \to pr_2}\vdash}\ \to -\mathrm{D}}{\vdash \neg(\,\mathbf{pr_1\to pr_2}\,)}\ \neg-\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-\mathrm{D}$ è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare la foglia

$$\mathbf{M(x), G(x) \vdash A(x)}$$

mandando sempre a $\mathbf{1}$ l'interpretazione di $\mathbf{M(x)}$ e $\mathbf{G(x)}$ e a $\mathbf{0}$ quella di $\mathbf{A(x)}$: ovvero dato un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto si definisce

$$\begin{aligned} \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{G(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \end{aligned}$$

In tal modello si verifica che **per ogni** $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\,\mathbf{M(x)} \,\&\, \mathbf{G(x)} \to \mathbf{A(x)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \,\&\, \mathbf{G(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \to \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1\&1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ovvero si è trovato un contromodello per la negazione del sequente di partenza

$$\vdash \neg(\,\mathbf{pr_1\to pr_2}\,)$$

e dunque un modello per il sequente di partenza.

In conclusione, il sequente di partenza $\vdash \mathbf{pr_1 \to pr_2}$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile**, visto che esiste un modello in cui è falso e uno in cui è vero ed è quindi un' **opinione**.

Introduciamo il concetto di regola vera in un modello. intuitivamente una regola è vera in un modello d se trasforma sequenti premessa veri nel modello d in un sequente conclusione vero sempre in d, ovvero una regola è vera in un modello se la verità scende lungo la regola nel modello se tutte le premesse sono vere nel modello. Da ciò consegue che se la premessa/le premesse sono vere (entrambe in questo secondo caso), la conclusione è vera.
Similmente, una regola a una/due premesse si dice vera in un modello se per ogni premessa rimane vera per tutte le regole, dicendosi *vera* e quindi *valida*.

Una regola per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice *sicura* se lei e le sue inverse sono entrambe valide rispetto alla semantica classica. Una regola con sequenti predicativi è non valida se esiste un modello in cui le premesse della regola sono vere mentre è falsa la conclusione della regola.
Le varie regole (per ogni a destra/per ogni a sinistra/per ogni a sinistra veloce/esiste a sinistra/esiste a dx/esiste a dx veloce/regole dell'uguaglianza) sono valide e quindi sicure; non è valida, invece, l'inversa dell'ogni a sx/l'inversa dell'esiste a destra veloce e quindi non sicura.

12.7.2 Regola dell'uguaglianza veloce

Si noti che la versione veloce della regola $= -S$ ovvero

$$\frac{\mathbf{\Gamma(t) \vdash \Delta(t)}}{\mathbf{\Gamma(s), t{=}s \vdash \Delta(s)}} = -\mathrm{S_v}$$

è valida ma non SICURA.

Ad esempio se la applichiamo rimuovendo solo alcune occorrenze come in

$$\frac{\dfrac{????}{\vdash f{=}t, s{=}t}}{t{=}s \vdash f{=}s, s{=}t} = -\mathrm{S}^*$$

si ottiene una foglia NON valida mentre la radice lo è.

Infatti sopra dovevamo sostituire TUTTE le occorrenze di $\mathbf{s}$ optando per

$$\frac{\dfrac{\dfrac{=\text{-ax}}{\vdash t = t, f{=}t}}{\vdash f{=}t, t{=}t}\ \mathrm{sc_{sx}}}{t{=}s \vdash f{=}s, s{=}t} = -\mathrm{S}^*$$

Invece ripetendo il primo tentativo con $= -\mathrm{S}$ anzichè con la sua versione semplificata otteniamo

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{=\text{-ax}}{\mathbf{t{=}s \vdash t = t, f{=}t}}}{t{=}s \vdash s{=}t, f{=}t} = -\mathrm{S}}{t{=}s \vdash f{=}t, s{=}t}\ \mathrm{sc_{sx}}}{t{=}s \vdash f{=}s, s{=}t} = -\mathrm{S}$$

ove la prima applicazione di $= -\mathrm{S}$ è INUTILE, ma ci si riprende con la seconda....

12.7.3 Esempi per chiarire il concetto di regola valida

1. L'asserzione

   $$\frac{\mathbf{x > 0} \vdash \text{se } \mathbf{y > 0} \text{ allora } \mathbf{x \cdot y > 0}}{\mathbf{x > 0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{y > 0} \text{ allora } \mathbf{x \cdot y > 0}}$$

   formalizzata in

   $$\frac{\mathbf{x > 0 \vdash y > 0 \ \rightarrow x \cdot y > 0}}{\mathbf{x > 0 \vdash \forall y(y > 0 \rightarrow x \cdot y > 0)}}$$

   è un esempio di corretta applicazione della regola $\forall -\mathrm{D}$ che è pure sicura, ovvero scambiando la conclusione con la premessa l'asserzione rimane valida.

   Invece l'esempio

   $$\frac{\mathbf{y > 0} \vdash \text{se } \mathbf{x > 0} \text{ allora } \mathbf{x \cdot y > 0}}{\mathbf{y > 0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{x > 0} \text{ allora } \mathbf{x \cdot y > 0}}$$

   si formalizza in

   $$\frac{\mathbf{y > 0 \vdash x > 0 \ \rightarrow \ x \cdot y > 0}}{\mathbf{y > 0 \vdash \forall y(x > 0 \rightarrow x \cdot y > 0)}}$$

2. L'asserzione

$$\frac{\text{La cometa x entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è un scia luminosa nel cielo.}}{\text{Qualche cometa entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è una scia luminosa nel cielo.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{C(x)\&O(x,s)} \vdash \mathbf{L}}{\exists \mathbf{x}\,(\,\mathbf{C(x)\&O(x,s)}\,) \vdash \mathbf{L}}$$

usando
$C(x)$="x è una cometa"
$O(x,y)$="x entra nell'orbita di cattura di y"
L="c'è una scia luminosa nel cielo"
s="Sole"
che è un esempio di applicazione corretta della regola $\exists-$S visto che $\mathbf{x}$ non compare libera nel sequente conclusione. Quindi l'applicazione della regola è valida con la sua inversa, ovvero anche l'asserzione ottenuta invertendo la conclusione con la premessa è pure valida.

3. l'asserzione

$$\frac{\text{Pippo vede la stella Sirio} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}{\text{Pippo vede tutte le stelle} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}$$

si formalizza in

$$\frac{S(s)\&V(p,s) \vdash \neg L}{\forall x\,(\,S(x) \to V(p,x)\,) \vdash \neg L}$$

usando
$V(x,y)$="x **vede** y"
$S(x)$="x **è una stella**"
L="**Il cielo è nuvoloso**"
p="**Pippo**"
s="**Sirio**"

A prima vista non è applicazione di una regola come quella del "per ogni" a sx veloce. Allora proviamo a cercare una derivazione della conclusione per capire se la conclusione segue dalla premessa...

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,) \vdash \mathbf{S(s)} \qquad \mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S(s)} \to \mathbf{V(p,x)}\,)\,,\ \mathbf{V(p,s)} \vdash}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,), \mathbf{S(s)} \to \mathbf{V(p,s)} \vdash}\ \to -\mathrm{S}}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,) \vdash}\ \forall-\mathrm{S}}{\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,), \mathbf{L} \vdash}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,) \vdash \neg \mathbf{L}}\ \neg-\mathrm{D}$$

Ora dalla foglia di sx possiamo dedurre che se facciamo un modello

$$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Sirio}, \mathbf{Pippo}\}$$

in cui poniamo

per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\mathbf{S(x)^D(d) = 0}$
$\mathbf{L^D = 1}$
$\mathbf{s^D = Sirio}$, $\mathbf{p^D = Pippo}$
e infine $\mathbf{V(x,y)}^{\mathcal{D}}$ definito a piacere

abbiamo che $(\,\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè non c'è nessuna stella in $\mathbf{D}$, ovvero $\mathbf{S(x)^D(d)} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, e quindi l'implicazione $(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, mentre $(\neg\mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque nel modello il sequente $\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S(x)} \to \mathbf{V(p,x)}\,) \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta falso. Invece il sequente $\mathbf{S(s)\&V(p,s)} \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta vero nel modello perchè $(\,\mathbf{S(s)\&V(p,s)} \to \neg\mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{S(s)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{S(x)^D(s^D)} = \mathbf{0}$ e dunque $(\mathbf{S(s)\&V(p,s)})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero l'implicazione è vera nel modello scelto.

In conclusione l'asserzione di partenza *NON è valida* perchè abbiamo trovato un modello in cui la premessa è vera ma la conclusione no.

Similmente, una regola si dice *derivata* se data una derivazione qualsiasi, la derivazione ottenuta applicando la regola si può espandere in una derivazione senza ispezionare le derivazione dei sequenti premessa.

12.9.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $\mathbf{LC}_=$

Le regole COLPEVOLI dell' assenza di un processo decisione per **LC** e per $\mathbf{LC}_=$ sono

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{-S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{-D}$$

oltrechè la regola $=-\mathrm{S}$, poichè nel cercare una derivazione di un sequente radice dal basso verso l'altro $\Uparrow$ con queste regole **aumenta la complessità** dei segni. Si ricorda che non si può fare altrimenti se si vuole avere una procedura anche semi-automatica come in sezione 12.6.1 perchè le versioni veloci di queste regole non sono sicure ovvero non permettono di concludere che se una foglia è falsa in un modello anche la radice lo è.

Consigli su come cercare una derivazione o contromodello

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e $\forall$-D e $\exists$-S

---

se non si riesce a derivare il sequente
meglio costruire il contromodello falsificando il sequente
che si trova lungo il ramo che non finisce con foglie tutte assiomi
PRIMA di una (o una seconda) applicazione di $\forall$-S o $\exists$-D

Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento

---

NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli
(e, sebbene NON sia obbligatorio, controllare che il sequente radice sia falso nel contromodello)

NON USARE regole NON SICURE se non si è sicuri
se il sequente è derivabile

---

usare SOLO le lettere $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ come VARIABILI
nelle regole **$\exists$-S** e **$\forall$-D**

---

usare le lettere minuscole $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ come costanti

---

le lettere **u**,**v**, **u**, **t**,**s** sono usate come METAVARIABILI per termini
ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili

L'asserzione

Franco è venuto ad una sola riunione.
Franco non è venuto all'ultima riunione.
Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.
L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

usando
$V(x,y)=$ x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

si può formalizzare tramite il sequente

$$\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d$$

che è una **tautologia** perchè è derivabile in LC$_=$ ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2),\ u=d,\ V(f,u)\vdash V(f,u)}\ =-\mathrm{S}}{\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2),\ V(f,d),u=d\vdash V(f,u)}\ \neg-\mathrm{S}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2)\,,\ V(f,d),u=d,\neg V(f,u)\vdash}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d),u=d\vdash}\ \neg-\mathrm{D}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (V(f,y_1)\&V(f,y_2)\rightarrow y_1=y_2)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d}$$

L'asserzione

Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.
Il numero x è uguale 2.

si può formalizzare in

$$\mathbf{\exists y\ O(y,f,2)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\ O(y_1,f,2)\ \&\ O(y_2,f,2)\ \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(2,f,2),\ O(x,f,2)\ \vdash x=2}$$

con
$f=$ " il fattoriale"
$2=$ " il numero due"
$O(x,y,z)=$ " il programma y su z dà output il numero x"

ed è una **tautologia** perchè si deriva come segue usando la seguente abbreviazione:

$\mathbf{Q(x)\ \equiv\ O(x,f,2)}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(2),x=2}\quad \dfrac{\text{ax-id}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(x),x=2}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(2)\&Q(x),x=2}\ \&-\mathrm{D}\qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-=}}{Q(2),Q(x),2=x\vdash 2=2}}{Q(2),Q(x),2=x\vdash x=2}\ =-\mathrm{S}}{Q(2),Q(x),Q(2)\&Q(x)\rightarrow 2=x\vdash x=2}\ \rightarrow-\mathrm{S}}{Q(2),Q(x),\forall y_2\ (\,Q(2)\&Q(y_2)\rightarrow 2=y_2\,)\vdash x=2}\ \forall-\mathrm{S}v}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,,\forall y_2\ (\,Q(2)\&Q(y_2)\rightarrow 2=y_2\,)\vdash x=2}\ -\mathrm{in}_{sx}}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\rightarrow y_1=y_2\,)\vdash x=2}\ \forall-\mathrm{S}v}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\rightarrow y_1=y_2\,)\vdash x=2}\ \&-\mathrm{S}}{\exists y\ Q(y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\rightarrow y_1=y_2\,)\,,\ Q(2),\ Q(x)\vdash x=2}\ \mathrm{sc}_{sx}$$

12.10.2 Soluzioni di esercizi su regole valide

1. *Si stabilisca se la regola*

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ 1(VL(C) = \emptyset)$$

è sicura, ovvero valida con la sua inversa.

Questa regola è NON valida perchè permette una quantificazione universale SENZA PROIBIRE l'occorrenza di $\mathbf{x}$ come variabile libera in ∇ che è invece proibita nella regola $\forall - \mathbf{D}$.

Per provarlo, mostriamo che il suo utilizzo assieme alle regole del calcolo $\mathbf{LC}_=$ permette di derivare un sequente non valido come segue.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \mathbf{A(x)}, \perp, \neg \mathbf{A(x)}}\ \neg\text{-}\mathbf{ax}_{dx_1}}{\vdash \mathbf{A(x)} \vee \perp, \neg \mathbf{A(x)}}\ \vee\text{-D}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}, \neg \mathbf{A(x)}}\ \mathbf{1}}{\vdash \neg \mathbf{A(x)}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}}\ \text{sc}_{\text{dx}}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{A(x)}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}}\ \forall\text{-D}$$

ove l'applicazione di $\forall$−D è corretta perchè $\mathbf{x}$ non è libera nel sequente radice.

Ora mostriamo che la radice dell'albero sopra

$$\vdash \forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{A(x)}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}$$

NON è un sequente valido. Infatti la formula $\forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{A(x)} \vee \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}$ che interpreta il sequente non è vera ad esempio nel modello

$\mathbf{D}= \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$
$\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse d è maschio
in quanto in tal modello si ha che $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)})^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = 0$ e dall'altra parte si ha pure $(\forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{A(x)})^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = 1$ e dunque concludiamo

$$(\ \forall \mathbf{x}\ \neg \mathbf{A(x)}\ \vee\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

Ora vediamo che la *regola inversa* **inv-1** di

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ 1(VL(C) = \emptyset)$$

ovvero

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}\ \text{inv} - 1(\mathbf{VL(C)} = \emptyset)$$

è **valida.**

Lo proviamo nel caso in cui ∇ è composta da una sola formula (che è equivalente al caso in cui è composta da più formule perchè è sempre possibile trasformare la virgola a sinistra come & e quella a destra come $\vee$) e sia dipendente sia da $\mathbf{x}$ che da $\mathbf{y}$ dato che restringersi alle proposizioni senza variabili potrebbe semplificare un pò troppo. Questo caso rappresenta il caso più generale perchè trattare la presenza di più variabili oltre ad $\mathbf{x}$ è equivalente a trattare un'unica variabile $\mathbf{y}$ oltre ad $\mathbf{x}$. Dunque supponiamo

$$\nabla \equiv \mathbf{B(x,y)}$$

Ora mostriamo che la regola è valida verificando che in ogni modello $\mathcal{D}$ fissato vale

$$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee}\ )\quad \rightarrow\quad \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee \perp\ )\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )$$

che con le scelte fatte diventa

$$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{B(x,y)}\ )\quad \rightarrow\quad \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B(x,y)}\ )$$

Usiamo il lemma scorciatoia per mostrare questo e supponiamo che nel modello valga

$$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{B(x,y)}\ )$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ in $\mathcal{D}$

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che vale nel modello pure

$$\forall\, \mathbf{x}\, \forall\, \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee\ \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B(x,y)}\ )$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ in $\mathcal{D}$

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee \perp)\ \vee\ \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che nel modello $\mathcal{D}$ valga $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per l'ipotesi

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

si ricava che nel modello

$$(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Ora si hanno due casi:
I caso: $\mathbf{B(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e quindi

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee \perp)\ \vee \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

II caso: $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi vale pure $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}) = \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ (si noti che la variabile $\mathbf{x}$ corrisponde alla prima componente della funzione in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) e dunque

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee \perp)\vee \mathbf{B(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(-,-)(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

In conclusione avendo ispezionato la verità su una coppia $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ a piacere si conclude che il sequente conclusione

$$\forall\, \mathbf{x}\, \forall\, \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A(x)} \vee\ \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B(x,y)}\ )$$

è vero nel modello $\mathbf{D}$.

Ciò significa che la regola inversa della regola **1** è **valida**.

14.1 Calcolo dei sequenti $LC_=$ per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \frac{\text{ax-tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\, x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \frac{\Sigma, s = t, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), s = t \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S}_{sym}$$

$$\frac{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$